Equation de droite

(fonction linéaire, fonction affine et équation cartésienne),

Equation de tangente et Asymptote dans le plan.

Table des matières

Au sein de ce cours, nous discuterons de la notion de droite qui, on le verra par la suite, peut porter plusieurs qualificatifs. Cette fiche a pour but de rassembler les différents chapitres vus au cours des années de lycée liées à aux différentes formes de l'équation de la droite afin de les compiler en un cours progressif et détaillé.

I. Différentes formes de l'équation de droite dans le plan

Les termes « fonction linéaire », « fonction affine » et « équation cartésienne » sont des qualificatifs ramenant à une forme particulière de l'équation de droite dans le plan. Nous allons tenter de les identifier et de comprendre leurs intérêts ensemble.

A. La forme linéaire

Une des formes les plus simples à manipuler est cette dernière :

$$\boxed{y = ax} \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) = ax}$$

Avec a un coefficient appartenant à $\mathbb{R}$. Cette forme induit la notion de proportionnalité.

Car oui, la notation peut être différente, mais l'application quant à elle reste la même.

D'un côté nous avons : $y = ax$

Où y est une lettre utilisée dans le formalisme des équations de droites.

Et la notation $f(x) = ax$

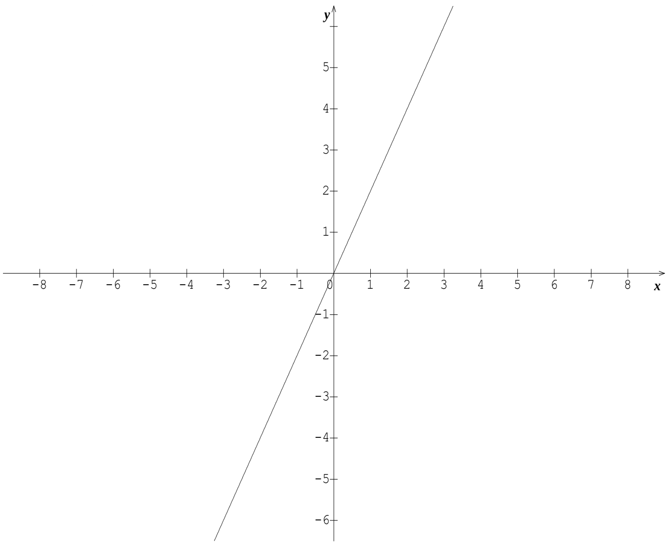
Qui est utilisée dans le formalisme des fonctions.

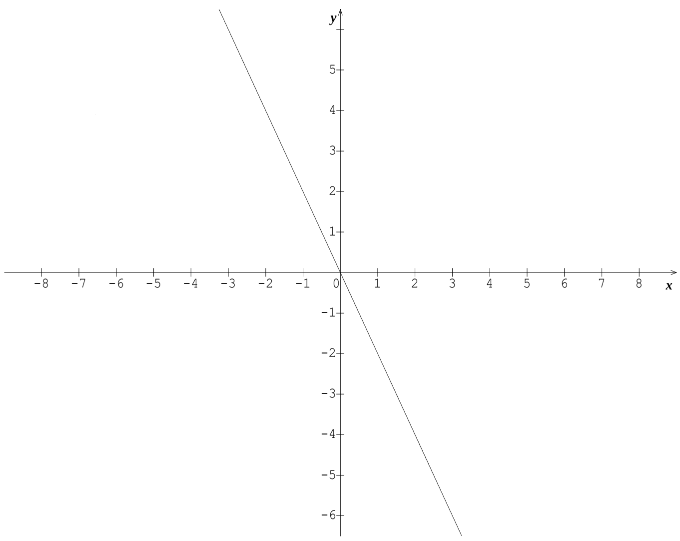
Attachons-nous maintenant au cœur de la compréhension de l'équation. Dans les deux cas, nous remarquons que la partie ax reste similaire. Ici, a représente une constante, donc une valeur prise dans un ensemble qui sera bien souvent $\mathbb{R}$. Mais a porte également un autre nom qui est *le coefficient directeur* (ou la pente) de la droite. Il peut être obtenu directement grâce au calcul (nécessitant les coordonnées de deux points appartenant à cette droite). Retrouvez ci-dessous son expression que nous détaillerons plus tard.

$$\boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$$

Il est possible de conjecturer la croissance de la droite connaissant le signe de a.

$a > 0$ ou $a < 0$





- Dans le premier cas où $a > 0$, on remarque que la droite est *croissante*.
- Dans le second cas où $a < 0$, la droite est alors *décroissante*.

En revanche, il est important de noter que ce n'est pas la seule chose à remarquer. Les deux droites passent par le point de coordonnées $O(0\,;0)$ qui n'est d'autre que l'origine de notre repère.

Comment déterminer ce coefficient directeur ?

- Par le calcul dans un premier temps, en réutilisant l'expression vue au-dessus.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Pour être en mesure de bien manipuler cette expression, il nous faut en comprendre tous les termes.

- « Δ » ou « delta » dans le formalisme mathématique signifie généralement « variation », ou différence. Même s'il n'est pas très important de le connaitre, savoir le reconnaitre peut s'avérer utile.
- Afin d'expliquer la suite, nous avons besoin d'introduire deux points et leurs coordonnées. Soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B;\,y_B)$ deux points appartenant à la droite étudiée. Ici, x_A et x_B représentent les abscisses de nos deux points et y_A, y_B leurs ordonnées.

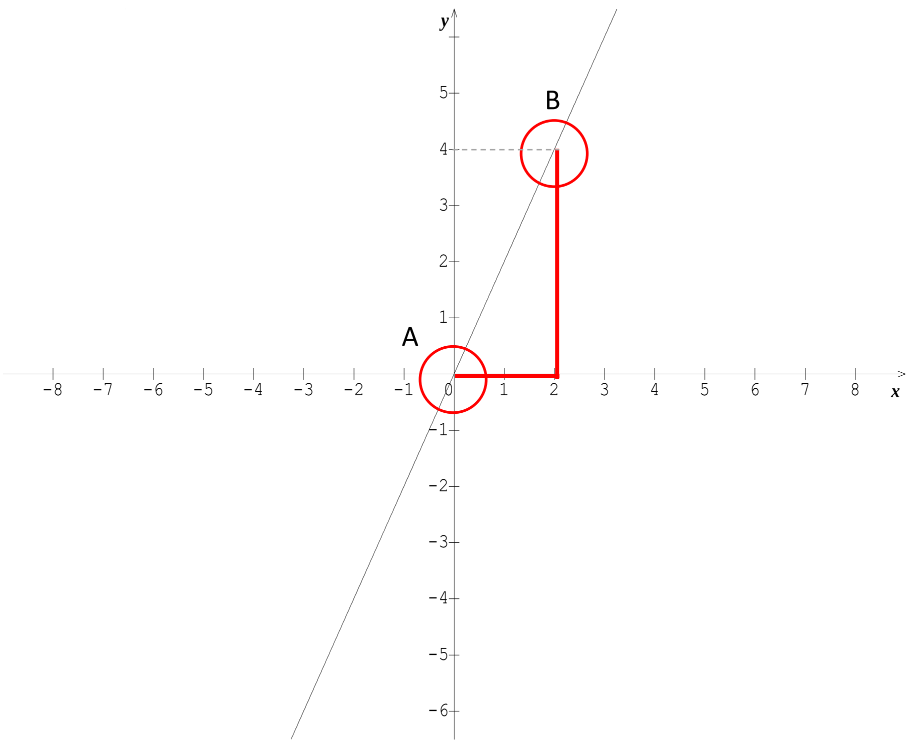
Calculer le coefficient directeur d'une droite revient donc à calculer la différence des ordonnées sur la différence des abscisses de deux points lui appartenant.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{différence\ des\ ordonnées}{différence\ des\ abscisses}$$

Notez que l'ordre des points n'a pas d'importance, en revanche il est essentiel de conserver le même ordre au numérateur et au dénominateur (un problème de signe peut en résulter).

- Conjecturer par lecture graphique.

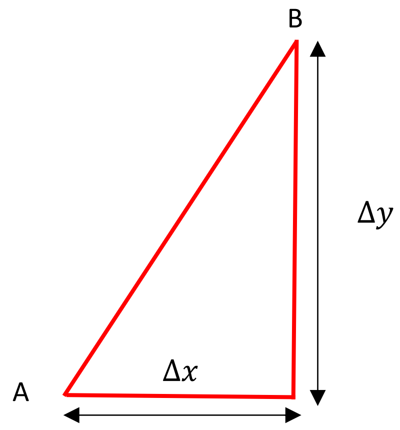
J'emploie le terme « conjecturer » car, il est difficile d'obtenir un résultat fiable par lecture graphique. Au mieux, nous aurons une idée de l'ordre de grandeur du coefficient directeur (le résultat obtenu par le calcul sera presque toujours mieux valorisé). Il reste cependant important de pouvoir conjecturer le coefficient directeur par lecture graphique (pour vérifier un calcul par exemple).



Choisissons tout d'abord deux points appartenant à notre droite. Notez que ce choix est infini, or il est possible de faire un choix pratique qui nous permettra d'obtenir un calcul plus rapide.

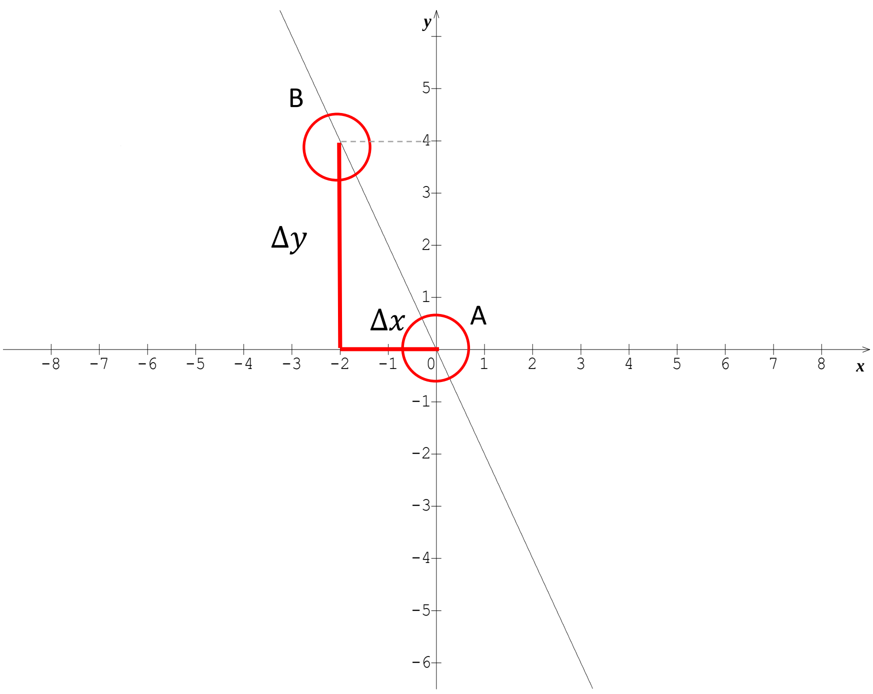
- Choisissons donc $A(0\,;0)$ et $B(4\,;\ 2)$.
- Traçons maintenant un triangle dont l'un des côtés est parallèle à l'axe des abscisses et l'autre est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Après agrandissement cela nous donne ce triangle rectangle.

Retour Sommaire



- Le côté parallèle à l'axe des ordonnées représente alors $\Delta y = y_A - y_B$
- Et le côté parallèle à l'axe des abscisses représente, lui $\Delta x = x_A - x_B$
- Déterminons si la droite et croissance ou décroissante. Dans notre cas celle-ci est croissante donc $a > 0$.
- Calculons $\Delta y = -4$ et $\Delta x = -2$, le signe de a étant positif alors : $a = \frac{-4}{-2} = 2$

De la même manière :



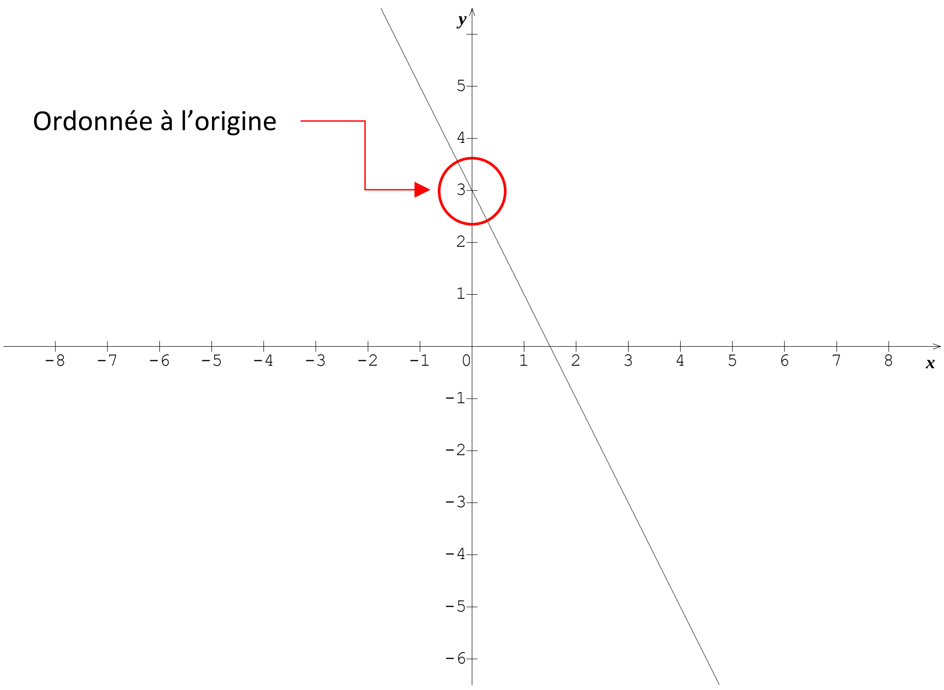
- Points sélectionnés : $A(0\,;0)$ et $B(4\,;\,-2)$
- $\Delta y = -4$ et $\Delta x = 2$
- La droite est décroissante, a est négatif. $a = -2$

B. La forme affine

Encore une fois, de nombreuses notations pourront être utilisées, la finalité, cependant, reste la même. Le terme b, qui marque la différence avec la forme précédente, vient ajouter une information supplémentaire qui n'était pas clairement indentifiable précédemment mais prend tout son sens dans cette nouvelle expression :

$\boxed{y = ax + b}$ $\boxed{f(x) = ax + b}$ $\boxed{y = mx + p}$

Ici, « b » est appelé *l'ordonnée à l'origine*. Cette valeur représente l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. C'est aussi la valeur de l'ordonnée lue au point d'abscisse $x = 0$.



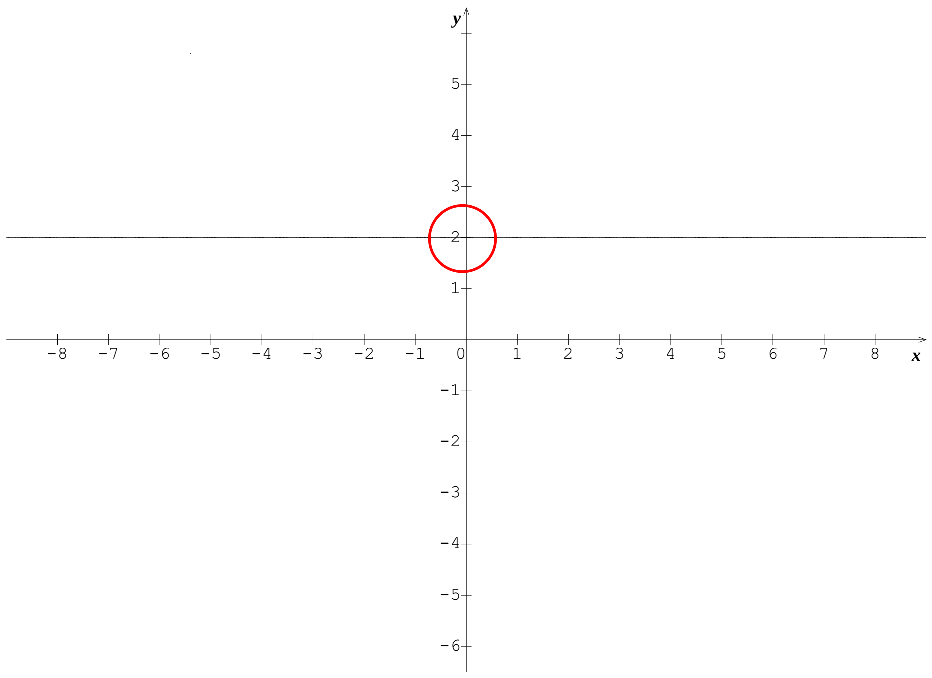
Si l'on s'en tient donc à la définition vue précédemment, nous cherchons l'ordonnée du point d'intersection entre l'axe des ordonnées et la droite (entouré en rouge). Ce point a pour coordonnées (0, 3), $b = 3$.

Dans le cas présenté, la droite a pour équation : $y = -2x + 3$

C. Cas particuliers

Il est nécessaire de s'attarder quelques instants sur deux cas particuliers qui peuvent souvent poser problème aux étudiants.

- Le cas des droites horizontales
- Et le cas des droites verticales



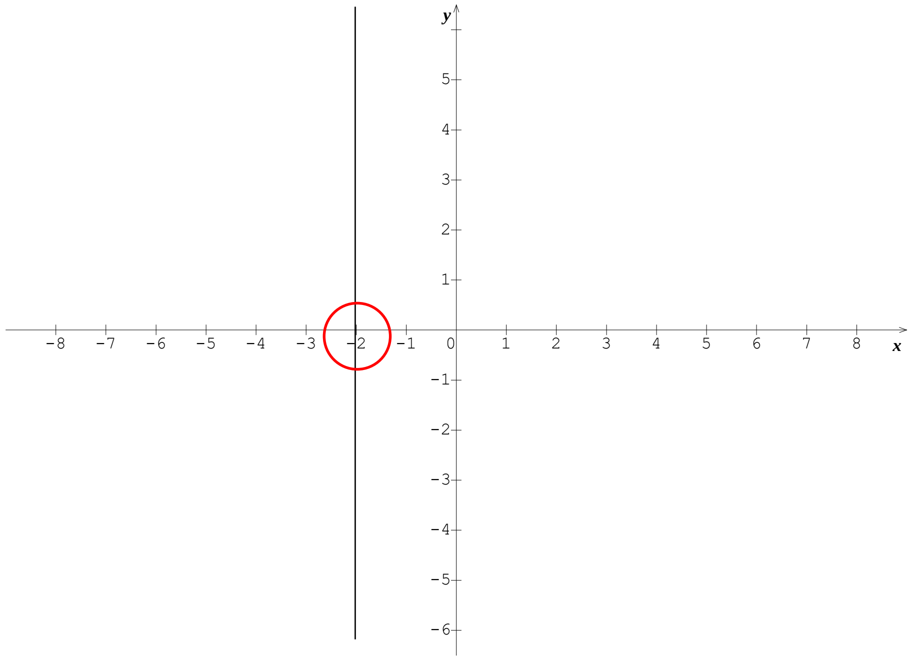
Dans le cas ci-dessus, nous observons une droite horizontale. La logique nous indique que si la droite est horizontale, la pente est donc nulle ($a = 0$).

L'équation de la droite aura donc pour expression :

$$y = b$$

Dans ce cas elle sera :

$$y = 2$$



Dans le cas ci-dessus, nous observons une droite verticale. Dans ce cas, la droite ne coupe jamais l'axe des ordonnées. De plus, il ne sous sera pas possible de calculer le coefficient directeur car Δx = 0. (rappel, il n'est pas possible de diviser par 0)

La droite aura donc pour expression :

$$x = c$$

Dans ce cas elle sera :

$$x = -2$$

D. Equation cartésienne de la droite

L'équation cartésienne d'une droite n'est ni plus ni moins une forme différente de la fonction affine. En effet, son expression est simplement quelque peu modifiée. La forme « équation cartésienne » possède quelques atouts qui justifient son utilisation. Au lycée, celle-ci sera souvent utilisée dans un contexte vectoriel.

Cette forme nous permettra de déterminer les coordonnées de vecteurs directeurs et de vecteurs normaux (orthogonaux) à cette droite.

Elle aura pour expression :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Cette forme possède 3 paramètres quelconques appartenant à $\mathbb{R}$ à savoir $a, b\ et\ c$.

ATTENTION : Ici les paramètres $a, b\ et\ c$ n'ont aucun lien avec le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b vus dans le contexte de la fonction affine. Il est relativement simple de le montrer.

Soit une équation cartésienne ayant pour expression :

$$x - 2y + 3 = 0$$

Nous allons transformer cette dernière sous la forme d'une fonction affine $y = ax + b$

$$x - 2y + 3 = 0$$

$$2y = x + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Sous la forme affine son coefficient directeur devient $a = \frac{1}{2}$ et son ordonnée à l'origine $b = \frac{3}{2}$. On remarque donc bien que le formalisme est différent suivant la forme utilisée.

Il a été vu précédemment que l'équation cartésienne rendait possible la détermination de vecteurs directeurs et de vecteurs normaux.

Pour rappel :

- Un vecteur directeur est un vecteur ayant la même direction que la droite
- Un vecteur normal est un vecteur orthogonal au vecteur directeur de la droite

Pour une droite d d'équation

$$ax + by + c = 0$$

Un vecteur directeur $\vec{u}$ aura pour coordonnées : $\vec{u}\binom{-b}{a}$

En reprenant l'exemple précédent :

$$x - 2y + 3 = 0$$

On peut déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u}\binom{2}{1}$

Maintenant qu'un vecteur directeur a été construit, il sera simple de déduire un vecteur normal à ce dernier en utilisant les propriétés du produit scalaire.

On déduit donc un vecteur normal de coordonnées : $\vec{v}\binom{a}{b}$ ici $\vec{v}\binom{1}{-2}$

On peut le vérifier :

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = (-b) * (a) + (a * b) = 0$$

Ici

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = (2) * (1) + (1 * -2) = 0$$

Les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont bien orthogonaux.

II. Equation de la tangente

Dans cette partie, nous nous occuperons uniquement de la partie méthodologie, vous pourrez retrouver plus de détails dans le chapitre dérivation. La tangente est une droite. Celle-ci possède donc toutes les caractéristiques d'une fonction affine vue plus haut or son expression diffère quelque peu.

L'équation de la tangente a pour expression :

$$\boxed{y = f'(a) * (x - a) + f(a)}$$

Une fois développée on obtient :

$$y = f'(a) * x - a * f'(a) + f(a)$$

Cette forme ne présente comme unique intérêt que de faire le parallèle avec $y = ax + b$

On identifie alors

$$a \rightarrow f'(a)$$

$$b \rightarrow -a * f'(a) + f(a)$$

Attention : ici les a n'ont pas la même signification, ce qui rend la compréhension délicate

Comprendre les composantes :

$$y = f'(a) * (x - a) + f(a) \quad \text{ou} \quad y = f'(x_A) * (x - x_A) + f(x_A)$$

Une tangente s'applique en un point, par exemple le point $\mathrm{A}(a, f(a))$ ou $\mathrm{A}(x_A, f(x_A))$

a ou x_A	représente l'abscisse du point du quel la tangente est issue.
f	est la fonction étudiée
$f(a)$ ou $f(x_A)$	représente l'image de a ou x_A par la fonction f
$f'(a)$ ou $f'(x_A)$	représente l'image de a ou x_A par la fonction f' dérivée de f

Exemple :

Soit f une fonction ayant pour expression :

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3 \qquad f \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

On étudiera la tangente au point d'abscisse $x = -2$ donc a ou $x_A = -2$

Pour déterminer l'expression de l'équation de la tangente, il est nécessaire de déterminer un certain nombre de composantes.

Dans un premier temps :

$$f(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 3$$

$$f(-2) = 12 - 4 - 3$$

$$f(-2) = 5$$

Dans un second temps :

$$f'(x) = 6x + 2$$

Puis :

$$f'(-2) = 6(-2) + 2$$

$$f'(-2) = -10$$

Enfin, il nous reste à assembler l'ensemble des composantes :

$$y = f'(-2) * (x - (-2)) + f(-2)$$

Soit

$$y = -10 * (x + 2) + 5$$

$$y = -10x - 20 + 5$$

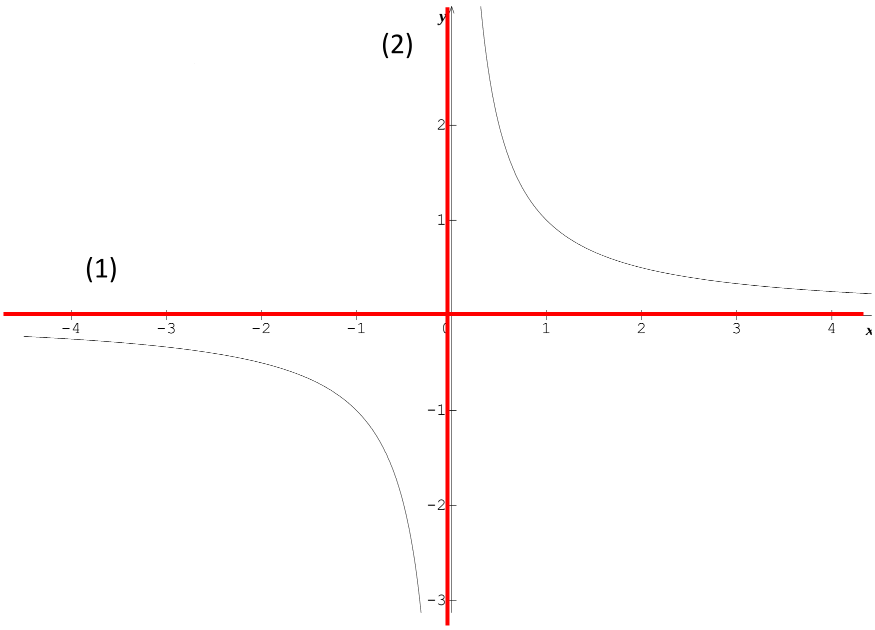
$$y = -10x - 15$$

On obtient au point d'abscisse $x = -2$, l'équation de la tangente a pour expression :

$$y = -10x - 15$$

III. L'asymptote

Lorsque l'on parle d'asymptote, on parle tout d'abord d'une droite (horizontale, verticale, oblique…). Une droite vers laquelle la fonction va tendre sans jamais l'atteindre. L'asymptote sera donc un bon outil d'encadrement de la fonction étudiée.



Prenons l'exemple de la fonction inverse $(x) = \frac{1}{x}$. Celle-ci possède plusieurs asymptotes :

- (1) Une asymptote horizontale ayant pour équation $y = 0$
- (2) Une asymptote verticale ayant pour équation cette fois $x = 0$

On retrouvera souvent une asymptote verticale lorsque la fonction n'est pas dérivable en une valeur particulière. Dans l'exemple ci-dessus, cette valeur est $x = 0$. En effet, la fonction inverse n'est pas dérivable en $x = 0$.

Plus généralement nous pourrons montrer qu'une droite peut être asymptote si son équation vérifie la condition suivante :

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - y = 0}$$

Ou y représente l'équation de droite de l'asymptote.

Cherchons à déterminer si l'équation $y = 0$ est bien une asymptote à f.

Calculons la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

De même pour

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Vérifions maintenant la condition :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} 0 - 0 = 0$$

L'équation $y = 0$ est bien une asymptote à f en $-\infty$ mais également en $+\infty$.

IV. Fiche récapitulative

Equation de droite :

- Forme linéaire : $y = ax$
- Forme affine : $y = ax + b$
- Forme cartésienne : $ax + by + c = 0$

Une droite est croissante si son coefficient directeur (forme affine ou linéaire) $a > 0$

Une droite est décroissante si son coefficient directeur (forme affine ou linéaire) $a < 0$

Détermination du coefficient directeur : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Un vecteur directeur $\vec{u}$ aura pour coordonnées (forme cartésienne) $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Un vecteur normal $\vec{v}$ aura pour coordonnées (forme cartésienne) $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Equation de la tangente : $y = f'(a) * (x - a) + f(a)$

Une droite est asymptote si elle vérifie : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - y = 0$