La fonction Exponentielle

Table des matières

Retour Sommaire

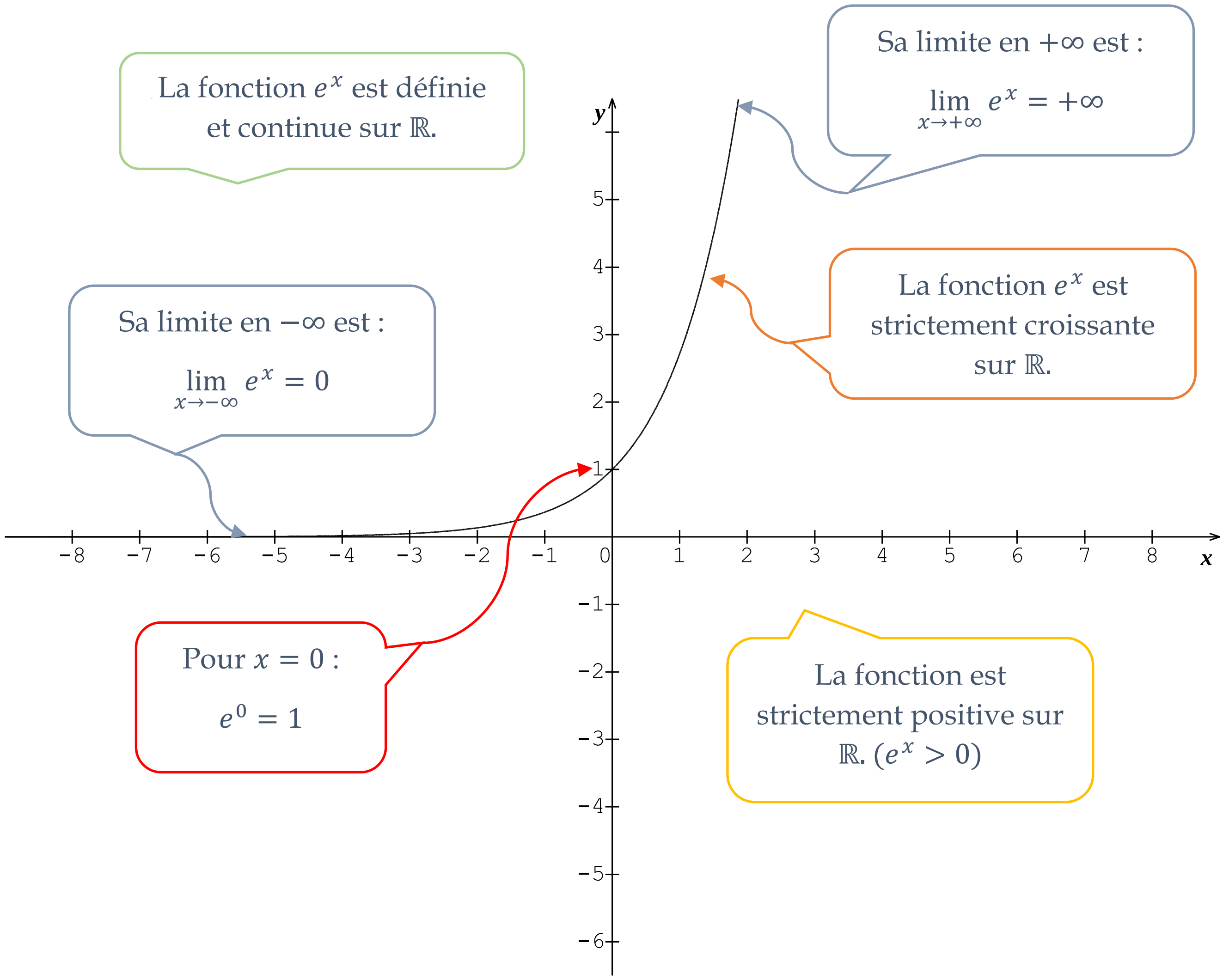
I. A la découverte de la fonction exponentielle

Tout au long de votre apprentissage des mathématiques, il vous sera proposé de découvrir de nouvelles fonctions mathématiques (ex : la fonction inverse, la fonction racine carrée…).

Toutes les propriétés de ces fonctions peuvent venir à se mélanger rapidement si celles-ci ne sont pas parfaitement maitriser.

Il est donc important de pouvoir associer toutes ces propriétés à quelque chose de « visuellement parlant », comme la représentation graphique de la fonction par exemple.

En effet, il sera possible de retrouver rapidement une vaste majorité de ces propriétés grâce à la courbe. Propriétés que nous expliciterons plus bas.



Notre représentation graphique nous permet donc d'associer rapidement au moins 6 propriétés essentielles de la fonction exponentielle.

II. Notations et propriétés générales

Généralement le formalisme utilisé pour représenter la fonction exponentielle est le suivant :

$$e^{x}$$

Où le « e » se réfère au terme « exponentielle ». Le x quant à lui est la variable utilisée. Son utilisation pratique reste assez similaire à celles des fonctions $\sqrt{x}$ ou $\cos(x)$ mais liée à des propriétés de calcul spécifiques à cette dernière. Vous pourrez également rencontrer une autre forme, plus rare celle-ci. A savoir :

$$\exp(x)$$

L'utilisation restera la même. En revanche cette notation peut facilement entrainer la confusion chez les étudiants. On lui préfèrera la notation précédente (plus vastement utilisée). **La fonction exponentielle e^x partage la touche $\ln(x)$ sur votre calculatrice**.

Une valeur particulière à connaitre pour $x = 0$, soit :

$$e^0 = 1$$

De nombreux étudiants peuvent être également confus par la notation : e^1

Représentant l'image de $x = 1$ par la fonction e^x soit $f(1) = e^1$

Cette quantité pourra être notée, pour des raisons de simplicité, seulement « e ». Soyez donc vigilant.

Il a été vu précédemment un certain nombre de propriétés liées à la fonction exponentielle. Nous allons désormais les approfondir un peu plus.

En effet une propriété importante à retenir est que la fonction exponentielle sous sa forme :

$$f(x) = e^x$$

Est strictement positive est également strictement croissante sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Il en sera de même pour la forme $e^{u(x)}$ où $u(x)$ représente une fonction polynomiale. Ce qui n'est pas sans rappeler la propriété de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$. Il sera donc aisé de la manipuler lors d'une étude de signe.

Exemple :

On désire étudier le signe de la fonction suivante, soit :

$$f(x) = -12e^{-3x+20}$$

Nous allons dans un premier temps découper notre expression en produit de facteurs à savoir :

- Le premier facteur $(-12) < 0$
- Le second facteur $(e^{-3x+20}) > 0$ par définition

On obtient alors le résultat suivant : $f(x) < 0$

Retour Sommaire

III. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Intéressons-nous maintenant à des propriétés plus difficiles ne pouvant être déduites grâce la représentation graphique. Il vous sera demandé de savoir manipuler la fonction exponentielle, isoler des variables, résoudre des équations…

Voilà donc quelques propriétés :

$$\boxed{e^a * e^b = e^{a+b}} \qquad (1)$$

$$\boxed{\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}} \qquad (2)$$

$$\boxed{(e^a)^n = e^{an}} \qquad (3)$$

Exemple :

Simplifier les expressions suivantes :

$$e^{x+3} * e^{4-5x}$$

En utilisant la propriété (1), l'expression devient :

$$e^{x+3} * e^{4-5x} = e^{(x+3)+(4-5x)} = e^{7-4x}$$

De même pour :

$$\frac{e^{x+3}}{e^{4-5x}}$$

En utilisant la propriété (2), l'expression devient :

$$\frac{e^{x+3}}{e^{4-5x}} = e^{(x+3)-(4-5x)} = e^{6x-1}$$

Enfin :

$$(e^{x+3})^2$$

En utilisant la propriété (3), l'expression devient :

$$(e^{x+3})^2 = e^{2(x+3)} = e^{2x+6}$$

D'autres propriétés peuvent dériver des précédentes soit :

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

Et inversement :

$$e^a = \frac{1}{e^{-a}}$$

Enfin $$\boxed{e^{\ln x} = x}$$

Lors de la résolution d'équation, il sera souvent nécessaire d'isoler la variable x. Soit l'équation à résoudre :

$$e^{x+3} = e^{4-5x}$$

Il est difficile de résoudre directement cette équation à cause de la présence de l'exponentielle.

Pour la faire disparaitre, nous allons utiliser des propriétés intrinsèques de la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$. Il est donc possible de simplifier l'expression de cette manière :

$$x + 3 = 4 - 5x$$

$$6x = 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$$

Il est également possible d'utiliser la fonction logarithme népérien ($\ln(x)$) afin d'obtenir ce même résultat.

<u>Attention :</u> l'équation devra de respecter la forme suivante : $e^{v(x)} = e^{u(x)}$ sous peine de ne pouvoir être simplifiée directement.

IV. Dérivées et primitives

A. Dérivées de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est probablement parmi les plus simples à manipuler malgré son apparente difficulté. On a pu voir précédemment que cette dernière est strictement croissante et strictement positive.

Il se trouve que sa dérivée reste également très simple à mémoriser :

$$\boxed{(e^x)' = e^x} \ sur\ \mathbb{R}$$

En revanche, la dérivée de la version « composée » de la fonction exponentielle est quant à elle quelque peu différente. Soit :

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}} \ sur\ \mathbb{R}$$

Où $u(x)$ représente une fonction quelconque.

Exemple :

On cherche à dériver la fonction suivante, soit :

$$g(x) = e^{-3x^2+4x-3}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On identifie tout d'abord : $u(x) = -3x^2 + 4x - 3$

$$u'(x) = -6x + 4$$

On procède maintenant à l'assemblage :

$$g'(x) = (-6x + 4)e^{-3x^2+4x-3}$$

B. Primitives de la fonction exponentielle

En ce qui concerne la primitive, on remarque de vastes similarités avec ce qui a été vu précédemment.

Les primitives de la fonction $f(x) = e^x$ ont pour expression :

$$\boxed{F(x) = e^x + C} \quad sur\ \mathbb{R}$$

Ici C est une constante quelconque qui sera déterminée grâce au contexte de l'exercice représentant la quantité possiblement « perdue » lors de la dérivation.

Les primitives de la fonction $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ ont pour expression :

$$\boxed{F(x) = e^{u(x)} + C} \quad sur\ \mathbb{R}$$

Ici C est une constante quelconque qui sera déterminée grâce au contexte de l'exercice.

Exemple :

On cherche à déterminer la primitive de la fonction suivante, soit :

$$g(x) = 3e^{2x-3}$$

La procédure est relativement similaire à ce qui a été vu précédemment, le chemin de réflexion est en revanche quelque peu différent.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On identifie : $u(x) = 2x - 3$

$$u'(x) = 2$$

Il est nécessaire que la fonction contienne la forme $u'(x)e^{u(x)}$ pour être en mesure d'appliquer la formule directement or ici ce n'est pas le cas.

On désirait : $u'(x) = 2$

Or notre fonction offre un 3 à la place. $g(x) = 3e^{2x-3}$

Il est possible de transformer notre expression à l'aide d'une compensation qui ne changera en aucun cas l'égalité telle que :

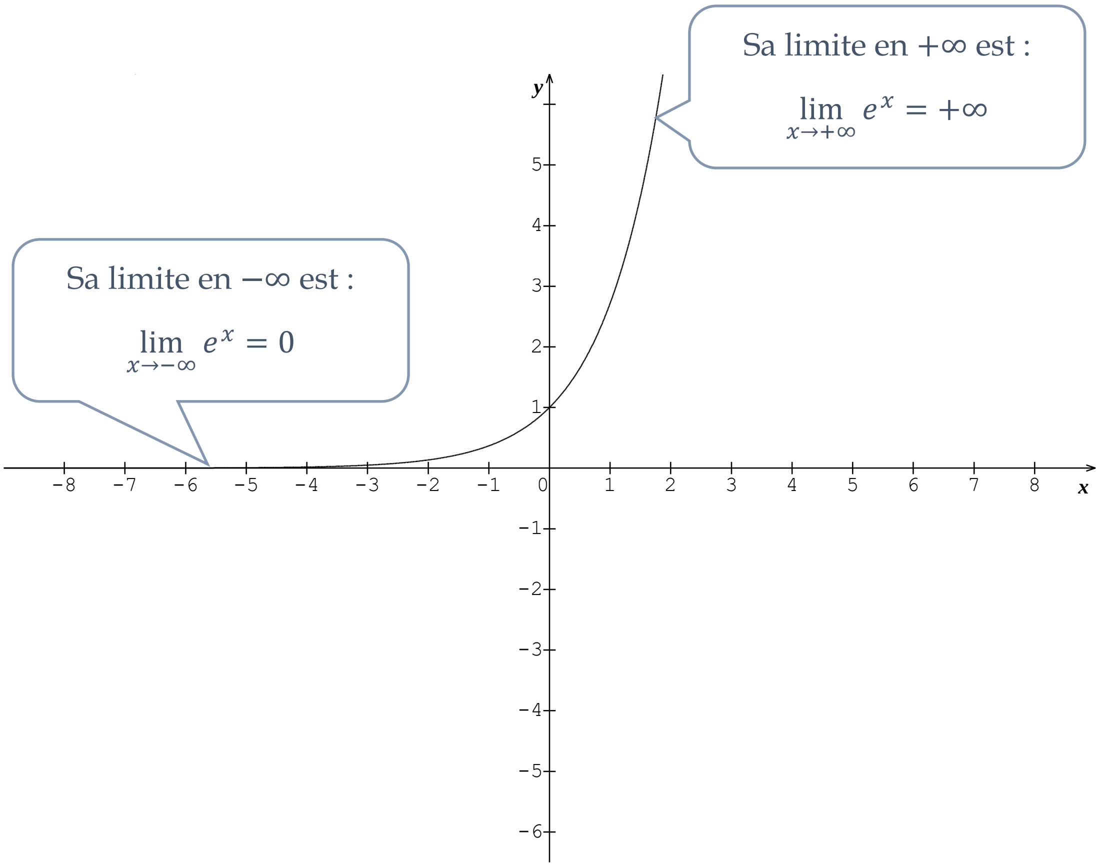
$$g(x) = \left(\frac{2}{2}\right) * 3e^{2x-3} = \left(\frac{3}{2}\right) * 2e^{2x-3}$$

On peut ainsi déduire l'expression d'une primitive de g :

$$G(x) = \frac{3}{2} * e^{2x-3} + C$$

V. Limites de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est également simple à manipuler lors de l'étude des limites, on rappelle la représentation graphique :



Les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Et

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$$

Dans le cas des limites de croissance comparée, il sera souvent nécessaire de lever des indéterminations de limite. Il est donc également important de connaitre les limites particulières présentées plus bas.

Retour Sommaire

Limites de la fonction exponentielle dans le cas de la croissance comparée :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0}$$ avec n appartenant à $\mathbb{N}$

Et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$ avec n appartenant à $\mathbb{N}$

<u>Exemple :</u>

On cherche à déterminer la limite de $f(x) = -2xe^x$ en $-\infty$.

Par définition : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$

Le produit de ces deux limites est appelé F.I. soit forme indéterminée. En effet, il n'est pas possible de prévoir l'issue de ce produit de limite car nous sommes incapables d'évaluer la croissance de ces deux fonctions. On utilise donc la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ dans notre cas $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Il reste à multiplier notre résultat par la quantité (-2). Soit :

$$\lim_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$$

<u>Outil pratique :</u> Il est possible de compiler simplement un grand nombre d'informations vues précédemment dans un tableau tel que :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

VI. Fiche récapitulative

Propriétés générales sur ℝ :

- e^x est continue
- e^x est strictement positive
- e^x est strictement croissante

Propriétés algébriques :

$$e^a * e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^n = e^{an}$$

La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ telle que :

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

Une primitive des fonctions suivantes est :

$$f(x) = e^x \qquad F(x) = e^x + C$$

$$f(x) = u'(x)e^{u(x)} \qquad F(x) = e^{u(x)} + C$$

Les limites la fonction aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Limites de la fonction exponentielle dans le cas de la croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$