La fonction
Logarithme népérien

Table des matières

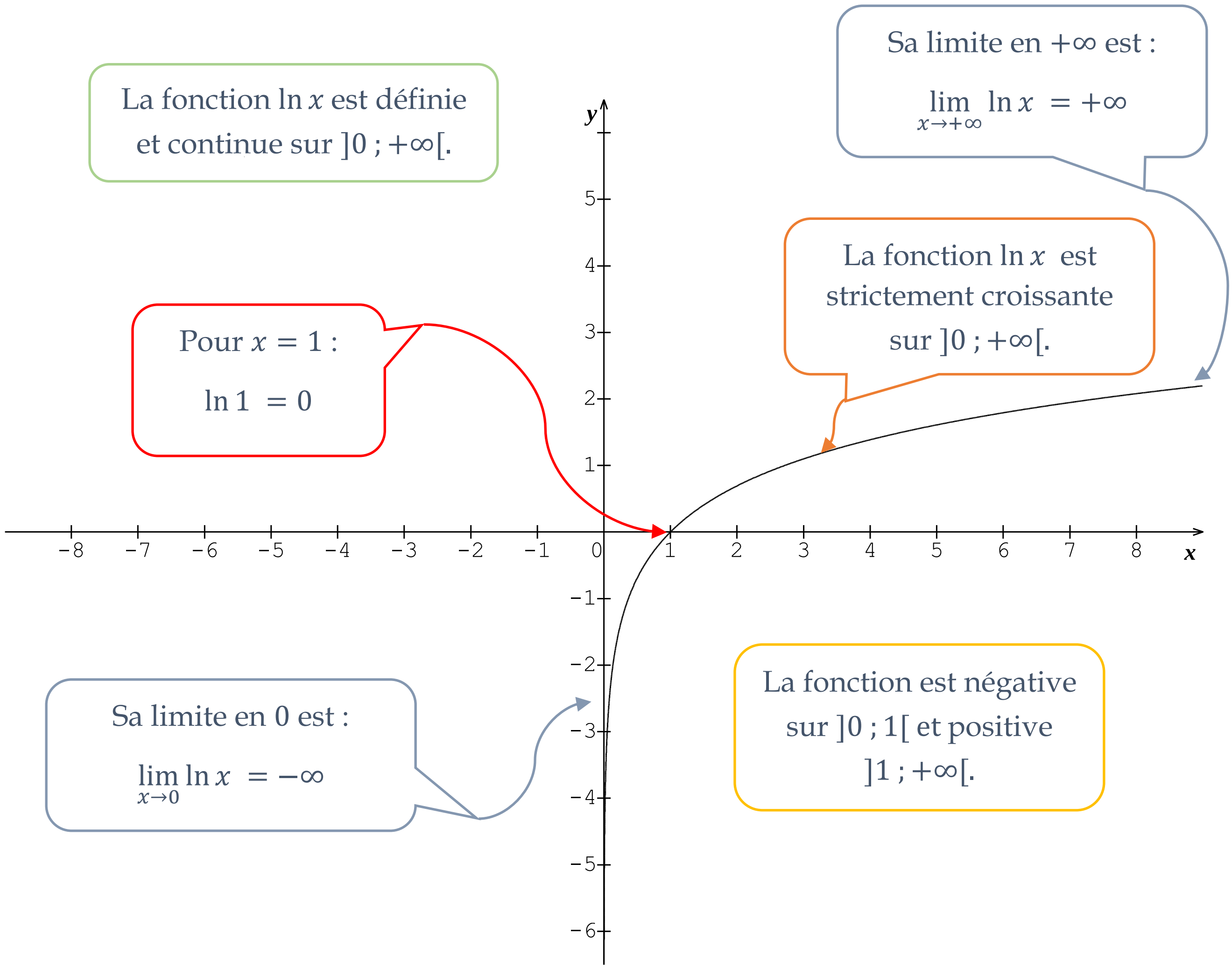
I. A la découverte de la fonction logarithme

Tout au long de votre apprentissage des mathématiques, il vous sera proposé de découvrir de nouvelles fonctions mathématiques (ex : la fonction inverse, la fonction racine carrée…).

Toutes les propriétés de ces fonctions peuvent venir à se mélanger rapidement si celles-ci ne sont pas parfaitement maitriser.

Il est donc important de pouvoir associer toutes ces propriétés à quelque chose de « visuellement parlant », comme la représentation graphique de la fonction par exemple.

En effet, il sera possible de retrouver rapidement une vaste majorité de ces propriétés grâce à la courbe. Propriétés que nous expliciterons plus bas.



Notre représentation graphique nous permet donc d'associer rapidement au moins 6 propriétés essentielles de la fonction logarithme népérien.

II. Notations et propriétés générales

Généralement le formalisme utilisé pour représenter la fonction logarithme népérien est le suivant :

$$\ln x$$

Où le « ln » se réfère au terme « logarithme népérien ». Le x quant à lui est la variable utilisée. Son utilisation pratique reste assez similaire à celles des fonctions $\sqrt{x}$ ou $\cos(x)$ mais liée à des propriétés de calcul spécifiques à cette dernière.

La fonction logarithme népérien $\ln x$ partage la touche e^x sur votre calculatrice.

Une valeur particulière à connaitre pour $x = 1$, soit :

$$\boxed{\ln 1 = 0}$$

Il a été vu précédemment un certain nombre de propriétés liées à la fonction logarithme népérien. Nous allons désormais les approfondir un peu plus.

En effet une propriété importante à retenir est que la fonction logarithme népérien sous sa forme :

$$f(x) = \ln x$$

Est :

- Négative sur l'ensemble $]0\,;1[$
- Positive sur l'ensemble $]1\,;+\infty[$
- Croissante sur son ensemble de définition $]0\,;+\infty[$.

La fonction logarithme népérien n'ayant pas un signe strictement positif ou négatif sur son ensemble, il sera nécessaire de la manipuler précautionneusement lors d'une étude de signe.

Exemple :

On désire étudier l'ensemble de définition de la fonction suivante, soit :

$$f(x) = -12\ln(-3x + 20)$$

Nous allons dans un premier temps découper notre expression en produit de facteurs à savoir :

- Le premier facteur (-12), pas de contraintes particulières
- Le second facteur $\ln(-3x + 20)$ se doit de vérifier les contraintes liées à la fonction logarithme népérien $(-3x + 20 > 0)$.

Par définition la fonction $\ln x$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$. Déterminons si l'intérieur de la parenthèse vérifie bien cette condition.

x	$-\infty$		$20/3$		$+\infty$
$-3x+20$		$+$	0	$-$	

La quantité $-3x + 20$ doit être strictement positive, on retient donc que l'ensemble de définition de la fonction est :

$$Df =]-\infty; \frac{20}{3}[$$

III. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Intéressons-nous maintenant à des propriétés plus difficiles ne pouvant être déduites grâce la représentation graphique. Il vous sera demandé de savoir manipuler la fonction logarithme népérien, isoler des variables, résoudre des équations…

Voilà donc quelques propriétés :

$$\boxed{\ln ab = \ln a + \ln b} \qquad (1)$$

$$\boxed{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b} \qquad (2)$$

$$\boxed{\ln a^n = n \ln a} \qquad (3)$$

Exemple :

Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln 3x - \ln x - \ln 1$$

En utilisant la propriété (2), et le fait que $\ln 1 = 0$ l'expression devient :

$$\ln 3x - \ln x - \ln 1 = \ln \frac{3x}{x} = \ln 3$$

De même pour :

$$\ln(3x - 2) + \ln(x + 4) - \ln x^2$$

En utilisant la propriété (1) et (2), l'expression devient :

$$\ln \frac{(3x - 2)(x + 4)}{x^2}$$

Enfin :

$$\ln(x + 3)^2$$

En utilisant la propriété (3), l'expression devient :

$$2 \ln(x + 3)$$

D'autres propriétés peuvent dériver des précédentes soit :

$$\ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

De plus :

$$\ln\sqrt{a} = ln\, a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln a$$

Enfin $$\boxed{\ln e^x = x}$$

Lors de la résolution d'équation, il sera souvent nécessaire d'isoler la variable x. Soit l'équation à résoudre :

$$\ln(x+3) = \ln(4-5x)$$

Il est difficile de résoudre directement cette équation à cause de la présence de la fonction logarithme.

Pour la faire disparaitre, nous allons utiliser des propriétés intrinsèques de la fonction logarithme népérien. Il nous faudra tout d'abord nous assurer que chacun des facteurs vérifie les contraintes de la fonction logarithme $Df\ =]0; +\infty[$. On pose donc :

$$x + 3 > 0$$

$$x > -3$$

Et

$$4 - 5x > 0$$

$$4 > 5x$$

$$x < \frac{4}{5}$$

La solution devra appartenir à l'ensemble $]-3\,;\,\frac{4}{5}[$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur ℝ. Il est donc possible de simplifier l'expression de cette manière :

$$x + 3 = 4 - 5x$$

$$6x = 1$$

Retour Sommaire

$$x = \frac{1}{6}$$

$$S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$$

Notre solution S appartient bien à l'ensemble $]-3\,;\,\frac{4}{5}[$.

Il est également possible d'utiliser la fonction exponentielle (e^x) afin d'obtenir ce même résultat.

Attention : l'équation se devra de respecter la forme suivante : ($\ln(v(x)) = \ln(u(x))$) sous peine de ne pouvoir être simplifiée directement.

IV. Dérivées et primitives

A. Dérivées de la fonction exponentielle

On a pu voir précédemment que la fonction logarithme népérien est strictement croissante négative sur l'ensemble $]0\,;1[$ et positive sur l'ensemble $]1\,;+\infty[$.

Sa dérivée a pour expression :

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \quad sur\ ]0\,;+\infty[$$

La dérivée de la version « composée » de la fonction logarithme népérien est quant à elle quelque peu différente. Soit :

$$\boxed{((\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Où $u(x)$ représente une fonction quelconque définie sur $]0\,;+\infty[$.

Exemple :

On cherche à dériver la fonction suivante, soit :

$$g(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$$

g est dérivable sur un ensemble qu'il nous faut définir en posant :

$$-x^2 + 4x - 3 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 * (-1) * (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{-2} = 1$$

On obtient le tableau de signe du polynôme suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction est donc dérivable sur l'ensemble]1 ; 3[.

On rappel :

$$((\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On identifie tout d'abord : $u(x) = -x^2 + 4x - 3$

$$u'(x) = -2x + 4$$

On procède maintenant à l'assemblage :

$$g'(x) = \frac{-2x + 4}{-x^2 + 4x - 3}$$

B. Primitives de la fonction exponentielle

En ce qui concerne la primitive, on remarque de vastes similarités avec ce qui a été vu précédemment.

Les primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ ont pour expression :

$$\boxed{F(x) = \ln x + C} \quad sur\ ]0\,;+\infty[$$

Ici C est une constante quelconque qui sera déterminée grâce au contexte de l'exercice représentant la quantité possiblement « perdue » lors de la dérivation.

Les primitives de la fonction $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ont pour expression :

$$\boxed{F(x) = \ln u(x) \ + C} \qquad avec\, u(x) > 0$$

Ici C est une constante quelconque qui sera déterminée grâce au contexte de l'exercice.

Exemple :

On cherche à déterminer la primitive de la fonction suivante, soit :

$$g(x) = \frac{-4x + 12}{-x^2 + 6x + 4}$$

La procédure est relativement similaire à ce qui a été vu précédemment, le chemin de réflexion est en revanche quelque peu différent.

On identifie : $u(x) = -x^2 + 6x + 4$

$$u'(x) = -2x + 6$$

Il est nécessaire que la fonction contienne la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ pour être en mesure d'appliquer la formule directement or ici ce n'est pas le cas.

On désirait : $u'(x) = -2x + 6$

Or notre fonction offre $-4x + 12$ à la place.

Il est possible de transformer notre expression à l'aide d'une compensation qui ne changera en aucun cas l'égalité telle que :

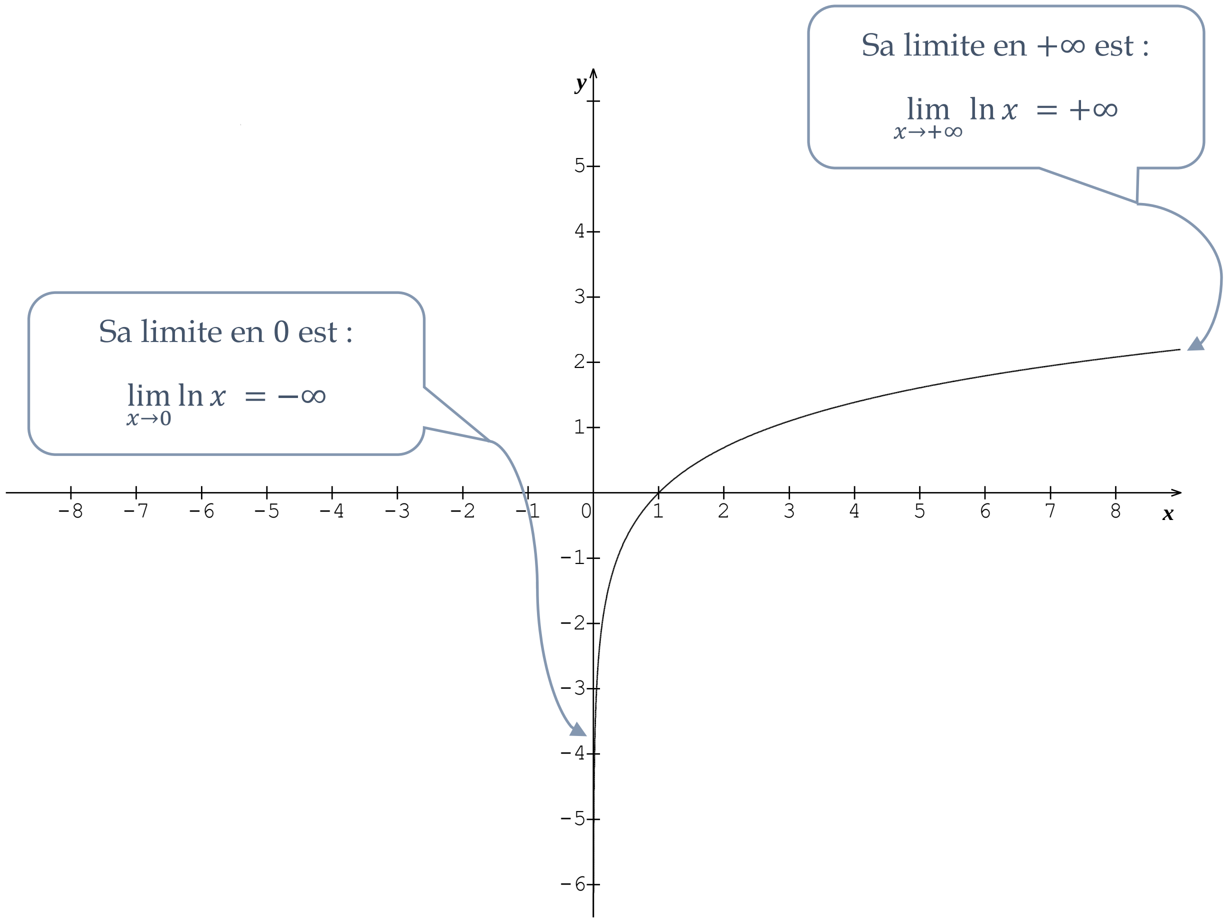
$$g(x) = \left(\frac{2}{2}\right) * \frac{-4x + 12}{-x^2 + 6x + 4} = (2) * \frac{-2x + 6}{-x^2 + 6x + 4}$$

On peut ainsi déduire l'expression d'une primitive de g :

$$G(x) = \ 2\ln(-x^2 + 6x + 4) + C$$

V. Limites de la fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est également simple à manipuler lors de l'étude des limites, on rappelle la représentation graphique :



Les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty}$$

Et

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty}$$

Dans le cas des limites de croissance comparée, il sera souvent nécessaire de lever des indéterminations de limite. Il est donc également important de connaitre les limites particulières présentées plus bas.

Retour Sommaire

Limites de la fonction logarithme népérien dans le cas de la croissance comparée :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0} \quad \text{avec } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}$$

Et

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0} \quad \text{avec } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}$$

Exemple :

On cherche à déterminer la limite de $f(x) = -2x \ln x$ en 0.

Par définition : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -2x = 0$

Le produit de ces deux limites est appelé F.I. soit forme indéterminée. En effet, il n'est pas possible de prévoir l'issue de ce produit de limite car nous sommes incapables d'évaluer la croissance de ces deux fonctions. On utilise donc la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \qquad \text{dans notre cas} \qquad \lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

Il reste à multiplier notre résultat par la quantité (-2). Soit :

$$\lim_{x\to 0} -2x \ln x = 0$$

Outil pratique : Il est possible de compiler simplement un grand nombre d'informations vues précédemment dans un tableau tel que :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Retour Sommaire

VI. Fiche récapitulative

Propriétés générales sur $]0\,;+\infty[$ *:*

- Négative sur l'ensemble $]0\,;1[$
- Positive sur l'ensemble $]1\,;+\infty[$
- Croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Propriétés algébriques :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ *telle que :*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad sur \ \ ]0\,;+\infty[$$

$$((\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Une primitive des fonctions suivantes est :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \ln x + C \qquad sur\ ]0\,;+\infty[$$

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \qquad F(x) = \ln u(x) + C \qquad avec\ u(x) > 0$$

Les limites la fonction aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

Limites de la fonction logarithme népérien dans le cas de la croissance comparée :

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$