Complexe et Trigonométrie

Table des matières

I. Pourquoi les complexes sont-ils « complexes » ? 2
A. Introduction à l'univers des complexes 2
B. Particularités et formalisme 3
C. Le plan complexe 4
II. Complexes et calculs 5
A. Manipulation directe 5
B. Polynôme complexe 7
III. Module et argument 8
A. Le module 8
B. L'argument 9
C. Calcul d'angle 13
IV. Fiche récapitulative 14

Au sein de ce cours, nous discuterons de la notion de complexe. Concept mathématique introduit très tardivement dans l'histoire des mathématiques ainsi que dans les programmes scolaires. À ce jour, une vaste majorité des étudiants s'est retrouvée à un moment donné confus par ce concept. À juste titre, ce dernier remet en question nombre de certitudes acquises lors de votre apprentissage.

I. Pourquoi les complexes sont-ils « complexes » ?

A. Introduction à l'univers des complexes

L'introduction des nombres complexes en mathématique s'est faite sur un constat simple. Il ne pas possible de résoudre un certain type d'équations polynomiales du second degré.

Exemple :

Soit le polynôme :

$$h(x) = 3x^2 + 3x + 1$$

Pour déterminer l'existence et le nombre de solutions de ce polynôme, on utilise le discriminant tel que :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3)^2 - 4 * (3) * (1)$$

$$\Delta = -3$$

Un résultat négatif nous fera donc penser que ce polynôme ne possède pas de solutions dans R. En effet, il est difficile de concevoir de pouvoir pendre la racine d'un nombre négatif.

La problématique est donc posée, la solution est simple « créer un nombre tel qu'une fois élevé au carré il devient négatif »

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Evidemment, il sera nécessaire de créer un ensemble ou cette règle est légitime. Cet ensemble est $\mathbb{C}$, un ensemble plus grand encore que $\mathbb{R}$.

B. Particularités et formalisme

Avec l'introduction de nombre i et l'ensemble $\mathbb{C}$. Il est maintenant possible d'étendre le champ d'action des nombres complexes en créant le formalisme du nombre complexe à savoir une partie imaginaire et une partie réelle (notion se rapprochant de l'idée d'abscisse et d'ordonnée dans le plan complexe). Le terme affixe est noté z.

On notera

$$\mathrm{Re}(z) = x$$

La partie réelle de l'affixe z et

$$\mathrm{Im}(z) = y$$

La partie imaginaire de l'affixe z

Le nombre complexe d'affixe z se notera :

$$\boxed{z = x + iy} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = a + ib}$$

Cette forme ci-dessus est appelée « *la forme algébrique* ».

Exemple :

Soit un nombre complexe :

$$\mathrm{Re}(z) = 4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = -2$$

Notre affixe z aura pour expression :

$$z = 4 - 2i$$

Un nombre ne possédant pas de partie réelle $\mathrm{Re}(z) = 0$ sera appelé *un imaginaire pur.*

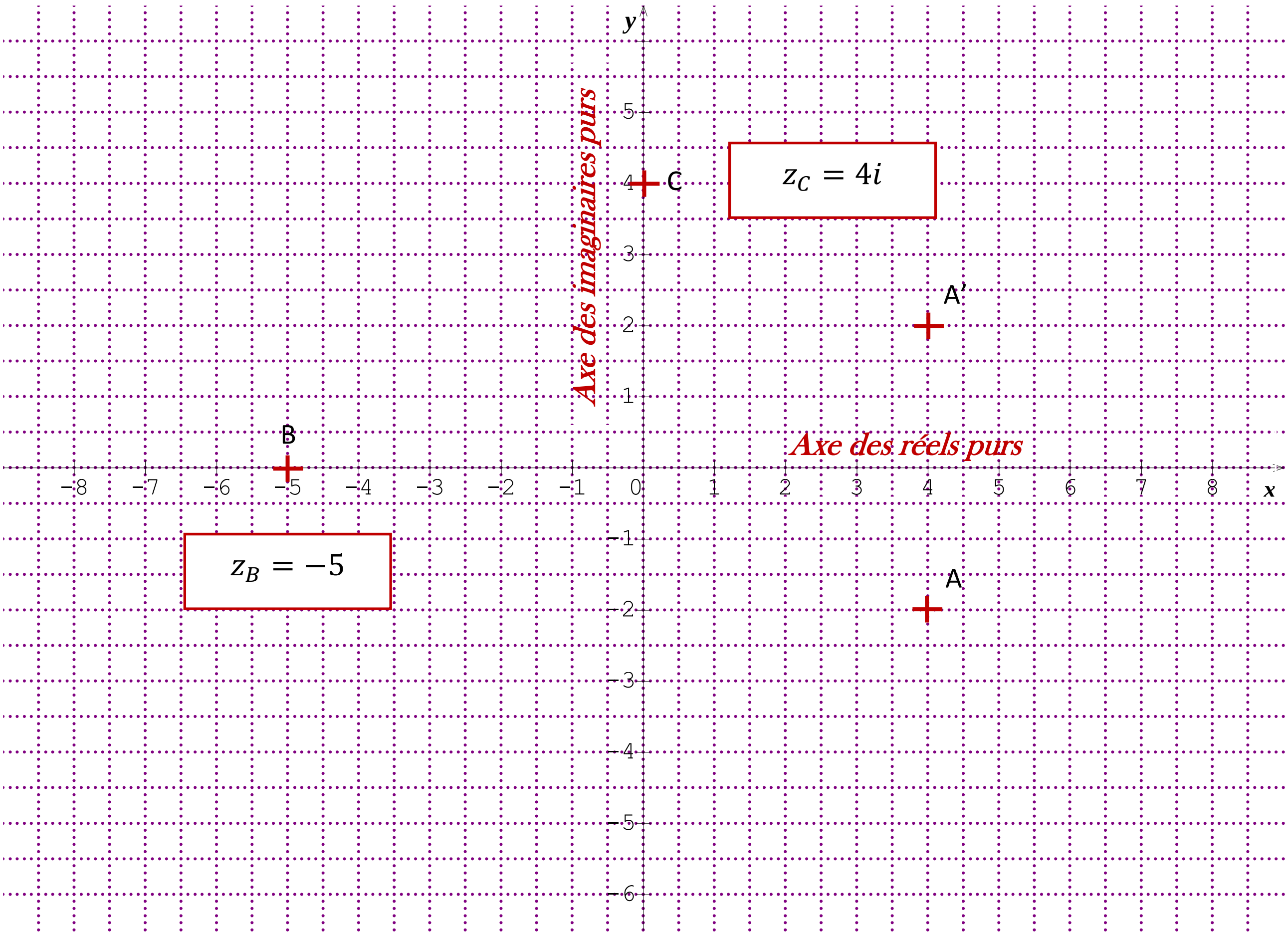
Un nombre ne possédant pas de partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) = 0$ sera appelé *un réel pur.*

On pourra introduire un outil, *le conjugué* de z noté $\overline{z}$ qui aura pour particularité d'avoir une partie imaginaire opposée à celle de z.

$$z = x + iy \qquad \boxed{\overline{z} = x - iy}$$

C. Le plan complexe

Le plan complexe est un outil visuel très intéressant et très simple d'utilisation car celui-ci repose sur vos connaissances du repère cartésien.



Dans ce repère :

- L'axe horizontal est appelé *l'axe des réels purs*.
- L'axe verticale est appelé *l'axe des imaginaires purs*

Pour placer une affixe dans le plan complexe, il suffit d'utiliser son expression. Associons les points A et A′ à l'affixe z et $\overline{z}$ vues précédemment tels que :

$$z_A = 4 - 2i$$

$$\overline{z}_A = z_{A'} = 4 + 2i$$

On remarque que le conjugué $\overline{z}$ et symétrique à z par rapport à l'axe des réels purs.

II. Complexes et calculs

A. Manipulation directe

Il vous sera demandé de savoir manipuler les nombres complexes afin d'adapter la forme au contexte de l'exercice. Une règle simple à retenir :

$$i^2 = -1$$

Soit deux affixes z_A et z_D telles que :

$$z_A = 4 - 2i \qquad \text{et} \qquad z_D = 3 + i$$

On cherche à mettre leur produit et leur quotient sous forme algébrique.

Le produit :

$$z_A z_D = (4 - 2i)(3 + i)$$

$$z_A z_D = 12 + 4i - 6i - 2i^2$$

$$z_A z_D = 12 - 2i - 2i^2$$

$$z_A z_D = 12 - 2i + 2$$

$$z_A z_D = 14 - 2i$$

Pour le quotient :

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{4 - 2i}{3 + i}$$

Pour obtenir une forme algébrique, il est nécessaire de se débarrasser des i au dénominateur. Pour cela nous allons utiliser une propriété du conjugué. A savoir :

Le produit de z et de $\overline{z}$ donnera un réel pur. Vérifions-le :

$$\text{Soit} \qquad z = x + iy \qquad \text{et} \qquad \overline{z} = x - iy$$

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy)$$

$$z\overline{z} = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2$$

$$z\overline{z} = x^2 - i^2y^2$$

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

i a bien disparu le résultat de notre produit est bien un réel pur.

Revenons à notre quotient :

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{4-2i}{3+i}$$

Pour faire disparaitre les i du dénominateur nous allons donc utiliser le conjugué de z_D. Notre expression devient :

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{(4-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{(4-2i)(3-i)}{3^2+1^2}$$

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{10-10i}{10}$$

$$\frac{z_A}{z_D} = 1-i$$

Le résultat du quotient est bien sous la forme algébrique.

B. Polynôme complexe

Un polynôme sous ayant pour expression :

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

On détermine Δ tel que :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta < 0$, alors le polynôme aura deux racines dans $\mathbb{C}$. Les racines auront pour expression :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}} \quad et \quad \boxed{z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

On remarque que z_2 est le conjugué de z_1.

Reprenons le cas vu précédemment :

$$h(x) = 3x^2 + 3x + 1$$

Calcul du déterminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3)^2 - 4 * (3) * (1)$$

$$\Delta = -3$$

$\Delta < 0$ le polynôme possède donc deux racines complexes telles que :

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{-(-3)}}{2 * (3)} \quad et \quad z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{-(-3)}}{2 * (3)}$$

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{6} \quad et \quad z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{6}$$

III. Module et argument

Pour comprendre l'intérêt du module et de l'argument, il est nécessaire de revenir au principe de repérage. La méthode de repérage utilisée depuis le collège et la méthode cartésienne, à savoir un repère, un point et deux coordonnées. Il également possible de placer un point dans un repère à l'aide d'un rayon et d'un angle. Dans l'univers des complexes, ce rayon sera appelé *module* et l'angle *argument.*

A. Le module

Le calcul du module z revient à déterminer la distance entre deux points dans le plan complexe. Il se note $|z|$. Issue du théorème de Pythagore, l'expression du module de z est fonction de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Une affixe $z = x + iy$ aura pour module :

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exemple :

Soit l'affixe $z = 4 - 2i$, on détermine son module :

$$|z| = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$$

$$|z| = \sqrt{16 + 4}$$

$$|z| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Cette valeur représente la distance entre le point d'affixe z et l'origine du repère.

B. L'argument

Pour être en mesure de calculer la valeur de l'argument, notée $\arg(z)$, il est important de maitriser la notion de module vue précédemment. A partir de la forme algébrique et de l'utilisation du module, nous allons détailler la démarche pour déterminer l'argument.

Soit l'affixe :

$$z = x + iy$$

Nous allons factoriser celle-ci par la valeur du module

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

Et poser la relation avec la forme trigonométrique à savoir :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

On déduit alors, grâce au cercle trigonométrique la valeur de θ qui n'est d'autre que l'argument de z.

On peut en déduire aisément la forme trigonométrique :

$$\boxed{z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}$$

Et la forme exponentielle :

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$$

Chacune de ces deux formes seront composées des deux paramètres module $|z|$ et argument θ de z.

Exemple :

Soit les affixes $z = 1 + i$ et $\overline{z} = 1 - i$

On calcule dans un premier temps les modules $|z|$ et $|\overline{z}|$:

On rappelle :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Donc

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De même pour

$$|\overline{z}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

On observe que les modules sont égaux, ce qui sera toujours le cas pour une affixe z et son conjugué $\overline{z}$. Cette propriété vient du caractère « quadratique » de la relation.

Dans un second temps déterminons le module :

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

Dans notre cas :

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On identifie :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En utilisant le cercle trigonométrique ou le tableau de des valeurs de θ.

θ	0	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Note : il est très important d'être capable de reproduire ce tableau et de maitriser le cercle trigonométrique.

Dans ce cas-là, on retrouve la valeur directement dans le tableau $\theta = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

Il nous est donc possible de présenter z sous les formes :

- *Algébrique*

$$z = 1 + i$$

- *Trigonométrique*

$$z = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right))$$

- *Exponentielle*

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

De même pour

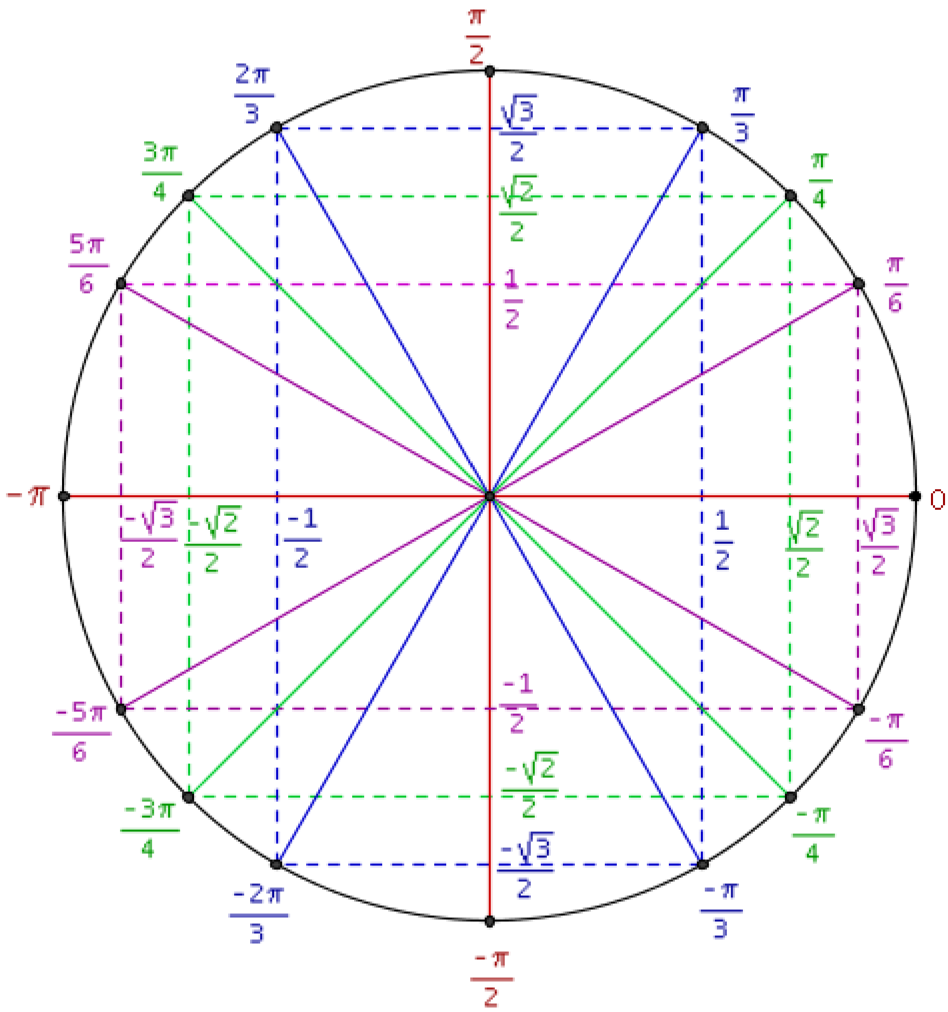
$$\overline{z} = 1 - i$$

$$\overline{z} = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\cos(\theta') = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta') = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cette fois-ci, la valeur de θ' ne peut être trouver directement dans le tableau. On utilise alors le cercle trigonométrique $\theta' = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$.



On observe que l'argument de z et l'opposé de celui de $\overline{z}$. Ce résultat vient de la symétrie axiale entre z et de $\overline{z}$.

C. Calcul d'angle

Il nous sera souvent utile d'être capable de déterminer la valeur d'un angle issue de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{CD}$ telle que :

$$\boxed{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, \text{avec } k \text{ appartient à } \mathbb{R}.}$$

Exemple :

Soit les affixes $z = 1 + i$ associé au point M et $\overline{z} = 1 - i$ associé au point M'

On désire calculer la valeur de l'angle entre les points $M, O\ et\ M'$ suivant la relation :

$$(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}) = \arg\left(\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O}\right) + 2k\pi, \text{avec } k \text{ appartient à } \mathbb{R}.$$

Sachant que $z_O = 0$

On détermine tout d'abord :

$$\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O} = \frac{1+2i+i^2}{2}$$

$$\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O} = i$$

$$(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}) = \arg\left(\frac{z_M - z_O}{z_{M'} - z_O}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{avec } k \text{ appartient à } \mathbb{R}.$$

IV. Fiche récapitulative

Nombre complexe : $i^2 = -1$

Le nombre complexe d'affixe z se notera (forme algébrique) : $z = x + iy$ ou $z = a + ib$

Le conjugué de z : $\overline{z} = x - iy$

Racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Module complexe de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Forme trigonométrique de z : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Forme exponentielle de z : $z = |z|e^{i\theta}$

Calcul d'angle :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, \text{avec } k \text{ appartient à } \mathbb{R}$$