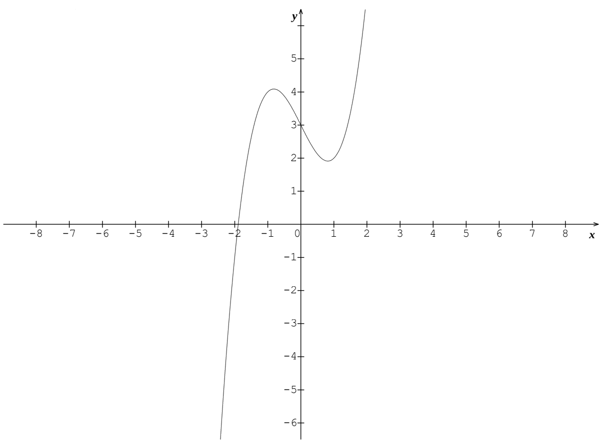
# Les suites numériques, Croissance et limite

## Table des matières

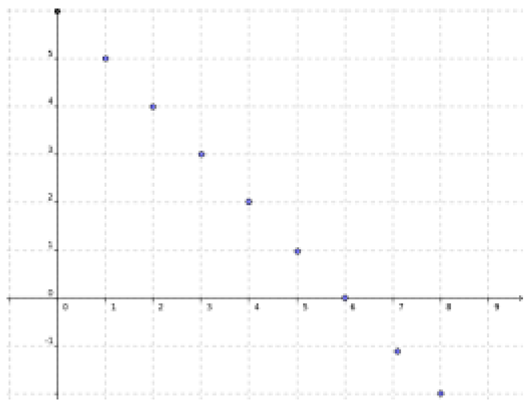
Dans ce nouveau chapitre, nous allons nous intéresser aux suites numériques. Ce chapitre est l'un des plus importants et volumineux du programme.

Le principe des suites nous permettra de nous projeter dans le futur en décrivant l'évolution d'un contexte particulier (l'évolution d'une population, l'évolution de prix…).

Nous retrouverons ici, certains outils utilisés lors d'une étude de fonction (la croissance, les limites …). La différence majeure par rapport aux fonctions se retrouve dans le caractère discret des suites (représentation d'une suite par une succession de points).



*a - Représentation d'une fonction continue*



*b - Représentation d'une suite numérique*

Au lycée, nous aurons l'occasion d'étudier un certain nombre de type et de forme de suite numérique.

Il est important, pour commencer dans de bonnes conditions, de bien comprendre le formalisme mathématique utilisé.

*Exemple :*

$$u_n$$

Ici le $u_n$ fait écho au $f(x)$ vu dans le chapitre des fonctions. Le $u$ représente donc le nom de la suite et le $n$ son rang appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}$.

# I. Différentes formes d'une suite numérique

Celles-ci sont multiples mais deux formes vont devoir retenir notre attention.

## A. La forme explicite

Cette forme a pour particularité de n'être dépendante que du rang $n$ (à l'image de la variable $x$ pour les fonctions). Il sera donc possible de déterminer la valeur de $u$ quel que soit $n$. (on dit alors que la suite est fonction de $n$)

*Exemple :*

Soit une suite $u_n = 3n + 5$

Il nous sera assez simple de déterminer le terme de la suite de rang $n = 3$ ou pour $n = 51$

$$u_3 = 3 * (3) + 5 \qquad\qquad u_{51} = 3 * (51) + 5$$

$$u_3 = 14 \qquad\qquad u_{51} = 158$$

## B. La forme itérative

Contrairement à la forme explicite, il sera souvent difficile de déterminer n'importe quel terme de la suite de manière indépendante. En effet, une suite numérique peut inclure dans son expression plusieurs itérations de cette dernière.

*Exemple :*

Soit une suite $u_{n+2} = 2\,u_{n+1} + u_n + 3$

Ici, il serait impossible de déterminer le terme de la suite pour $n = 3$ dû à un manque d'information évident.

$$u_{3+2} = 2\,u_{3+1} + u_3 + 3$$

Devient :

$$u_5 = 2\,u_4 + u_3 + 3$$

On remarque donc que le calcul ne peut être poursuivi sans la connaissance des valeurs $u_4$ et $u_3$.

Dans un premier temps, il vous sera demandé d'être capable de faire la différence entre ces deux types de formes.

## II. Différents types de suites numériques

Nous entrons maintenant dans le cœur de ce chapitre à savoir l'étude détaillée de quelques types de suite numérique. Lors d'une étude de suite, il vous sera également nécessaire de savoir identifier le type de la suite ainsi que d'être capable d'utiliser les outils ci-dessous.

### A. Les suites arithmétiques

Une suite est arithmétique si cette dernière vérifie une des formes suivantes :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r} \quad \text{ou} \quad \boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Dans le dernier cas, appelé le terme général (fonction de $n$), les termes :

$u_0$ : Représente le terme initial

$r$ : Représente la raison de la suite

*Exemple :*

Soit la suite $u_n = 3 + 5n$

On remarque que la suite est bien une suite arithmétique. On identifie alors $u_0 = 3$ et $r = 5$.

Malheureusement, les formes proposées ne seront pas toujours aussi évidentes. Dans le cas où celles-ci ne le seraient pas, nous utiliserons la forme itérative afin de nous aider à vérifier si ces dernières sont bien arithmétiques.

Forme itérative :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On déduit donc que la suite est arithmétique si elle vérifie la définition avec $r$ une quantité finie indépendante de $n$ appartenant à $\mathbb{R}$ :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

*Exemple :*

Soit les termes :

$$u_n = 4\,(n+1) - (n+1)$$

$$u_{n+1} = 3\,n + 2$$

On vérifie la condition vue plus haut :

$$u_{n+1} - u_n = (3\,n+2) - \big(4\,(n+1) - (n+1)\big)$$

$$u_{n+1} - u_n = (3\,n+2) - (4\,n + 4 - n - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = (3\,n+2) - (3n+3)$$

$$u_{n+1} - u_n = -1$$

$-1$ appartient à $\mathbb{R}$ et est indépendant de $n$. La suite $u_n$ est donc arithmétique et a pour raison $r = -1$.

Il sera possible de déterminer n'importe quel terme d'une suite arithmétique à partir d'une valeur de $u$ d'un rang quelconque en utilisant la forme suivante :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Ici $n$ représente le rang du terme recherché et $p$ le rang du terme connu.

## B. Les suites géométriques

Une suite est géométrique si cette dernière vérifie une des formes suivantes :

$\boxed{v_{n+1} = v_n * q}$ ou $\boxed{v_n = v_0 * q^n}$

Dans le dernier cas, appelé le terme général (fonction de $n$) les termes :

$v_0$ : Représente le terme initial

$q$ : Représente la raison de la suite

*Exemple :*

Soit la suite $v_n = -3 * 2^n$

On remarque que la suite est bien une suite géométrique. On identifie alors $v_0 = -3$ et $q = 2$.

Malheureusement, les formes proposées ne seront pas toujours aussi évidentes. Dans le cas où celles-ci ne le seraient pas, nous utiliserons la forme itérative pour nous aider à vérifier si ces dernières sont géométriques.

Forme itérative :

$$v_{n+1} = v_n * q$$

On déduit donc que si la suite vérifie :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

On déduit donc que la suite est géométrique si elle vérifie la définition avec $r$ quantité finie indépendante de $n$ appartenant à $\mathbb{R}$.

*Exemple :*

Soit les termes :

$$v_n = 2^{n+1}$$

$$v_{n+1} = 4 * 2^n$$

On vérifie la condition vue plus haut :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4 * 2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^2 * 2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 * 2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$$

2 appartient à $\mathbb{R}$ et est indépendant de $n$. La suite $v_n$ est donc géométrique et a pour raison $q = 2$.

Il sera possible de déterminer n'importe quel terme d'une suite géométrique à partir d'une valeur de $u$ d'un rang quelconque en utilisant la forme suivante :

$$\boxed{v_n = v_p * q^{n-p}}$$

Ici $n$ représente le rang du terme recherché et $p$ le rang du terme connu.

### C. Les suites arithmético-géométriques (section ES)

Cette forme particulière sera une combinaison des deux types de suites vues précédemment. Cependant, elle ne vérifiera aucune des propriétés vues plus haut. Celle-ci aura pour expression :

Où $a$ et $b$ sont des coefficients quelconques appartenant à $\mathbb{R}$.

$$u_{n+1} = a\, u_n + b$$

## III. Croissance d'une suite

L'étude de la croissance d'une suite comme celle d'une fonction nous permettra de mieux comprendre l'évolution de celles-ci.

Rappelons que si une suite est croissante alors le terme suivant $u_{n+1}$ sera toujours supérieur au terme précédent $u_n$. En toute logique, pour montrer qu'une suite est croissante, il nous faudra vérifier que :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$$

De même que si une suite est décroissante alors le terme suivant $u_{n+1}$ sera toujours inférieur au terme précédent $u_n$. Pour montrer, cette fois, qu'une suite est décroissante, il nous faudra vérifier que :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$$

*Exemple :*

Soit la suite :

$$u_n = -4 * 3^n$$

On détermine $u$ au rang $n + 1$

$$u_{n+1} = -4 * 3^{n+1}$$

On vérifie

$$u_{n+1} - u_n = -4 * 3^{n+1} - (-4 * 3^n)$$

$$u_{n+1} - u_n = 4(3^n - 3^{n+1})$$

$$u_{n+1} - u_n = 4(3^n(1 - 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = -8 * 3^n$$

Or $3^n > 0$ et $-8 < 0$ donc

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

La suite $u_n$ est donc décroissante.

# IV. Limite d'une suite

Dans cette partie de l'étude, nous allons reprendre la plupart de règles et outils de calcul vus dans les chapitres « étude des limites » à la différence près que l'étude ne sera conduite sur une suite et uniquement lorsque $n$ tend vers l'infini, soit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n$$

Dans certains cas particuliers de suite géométrique ou de suite arithmétique, l'étude pourra se concentrer autour de la valeur de la raison.

*Exemple :*

Soit une suite $v$ telle que :

$$v_n = 3 * 2^n$$

On constate que :

- $v_0 > 0$
- $q = 2 \ et \ 2 > 1 > 0$
- Par définition $n \geq 0$ également. Cette suite tendra vers $+\infty$.

Vérifions-le rigoureusement :

$$v_n = 3 * 2^n$$

Et

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} 3 * 2^n = +\infty$$

Soit une suite $w$ telle que :

$$w_n = -3 * \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On constate que :

- $w_0 < 0$
- $-1 < -\frac{1}{3} < 0$

Par définition $n \geq 0$ également. Cette suite tendra vers 0.

Vérifions-le rigoureusement :

$$w_n = -3 * \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} -3 * \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Plus généralement lorsque la raison d'une suite géométrique :

$$-1 < q < 1$$

La suite aura pour limite 0.

*Exemple :*

Soit la suite : $u_n = 3 + 5n$

- $u_0 = 3 > 0$
- $r = 5 > 0$

Cette suite tendra vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} 5n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} 3 + 5n = +\infty$$

# V. La somme de termes d'une suite

Il nous sera possible de déterminer la somme des termes d'une suite d'un rang à un autre en utilisant les expressions suivantes.

## A. Somme d'une suite arithmétique

Si une somme de termes issus d'une suite arithmétique se présente sous la forme suivante :

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$$

La relation à utiliser sera :

$$S = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme)}{2} * (nombre\ de\ termes)$$

Où

$$\boxed{S = \frac{\left(u_p + u_n\right)}{2} * ((n - p) + 1)}$$

Avec $n > p$

*Exemple :*

Une méthode simple afin de déterminer la valeur du dernier rang $n$ est d'utiliser le terme général de la suite arithmétique. Ici :

$$u_n = 2 + 2n \qquad \text{et} \qquad u_0 = 2, r = 2$$

$$2 + 2n = 32$$

On isole alors $n$. Le dernier terme à pour rang $n = 15$.

Soit la suite de termes avec $p = 0$ et $n = 15$ :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{15}$$

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 32$$

$$S = \frac{(2 + 32)}{2} * \left((15 - 0) + 1\right) = 272$$

## B. Somme d'une suite géométrique

Si une somme de termes issus d'une suite géométrique se présente sous la forme suivante :

$$S' = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$$

La relation à utiliser sera :

$$S' = (premier\ terme * nombre\ de\ termes) \qquad si \qquad q = 1$$

$$S' = (premier\ terme) * \frac{\left(1 - q^{(nombre\ de\ termes)}\right)}{1 - q} \quad si \quad q \neq 1$$

$$Ou$$

$$\boxed{S' = (v_p) * \frac{\left(1 - q^{(n-p)+1}\right)}{1 - q} \quad si \quad q \neq 1}$$

*Exemple :*

Soit la suite de termes :

$$S' = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{16}$$

$$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

Une méthode simple afin de déterminer la valeur du dernier rang $n$ est d'utiliser le terme général de la suite géométrique. Ici :

$$v_n = 4 * \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{16} = 4 * \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On détermine alors $n$ (grâce à un tableau de valeurs par exemple). Le dernier terme à pour rang $n = 6$, on déduit alors :

$$S' = (4) * \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(6-0)+1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127}{16} \quad si \quad q \neq 1$$

# VI. Principe de récurrence

Le principe de récurrence repose sur l'utilisation d'une hypothèse de récurrence (au rang $n$) de la suite, hypothèse qu'il vous faudra déterminer.

Si cette hypothèse se vérifie pour le terme initial ainsi que le rang $n+1$ alors l'hypothèse de récurrence est considérée comme vraie.

Une fois l'hypothèse de récurrence déterminée, cette méthode se découpe en trois arcs distincts :

- **L'initialisation**, vérifier que la propriété $P_0$ est vraie
- **L'hérédité ou transmissibilité**, vérifier que la propriété $P_{n+1}$ est vraie
- **La conclusion**, $P_0$ et $P_{n+1}$ sont vérifiées, $P_n$ est vraie

*Quelques exemples d'hypothèses de récurrence :*

Dans le cas où l'on voudrait montrer par récurrence qu'une suite est croissante, il suffit de poser comme hypothèse de récurrence :

$P_n : \quad u_{n+1} - u_n > 0$

Initialisation devient, vérifier : $P_0 : \quad u_1 - u_0 > 0$

L'hérédité devient, vérifier : $P_{n+1} : \quad u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

Dans le cas où l'on voudrait montrer par récurrence qu'une suite est décroissante, il suffit de poser comme hypothèse de récurrence :

$P_n : \quad u_{n+1} - u_n < 0$

Initialisation devient, vérifier : $P_0 : \quad u_1 - u_0 < 0$

L'hérédité devient, vérifier : $P_{n+1} : \quad u_{n+2} - u_{n+1} < 0$

Dans le cas où l'on voudrait montrer par récurrence qu'une suite est majorée, il suffit de poser comme hypothèse de récurrence :

$P_n : \quad u_n < l$

Initialisation devient, vérifier : $P_0 : \quad u_0 < l$ Avec $l$ appartenant à $\mathbb{R}$

L'hérédité devient, vérifier : $P_{n+1} : \quad u_{n+1} < l$

## VII. Fiche récapitulative

*Forme itérative d'une suite arithmétique :* $u_{n+1} = u_n + r$

*Terme général d'une suite arithmétique :* $u_n = u_0 + nr$

*Formule globale d'une suite arithmétique :* $u_n = u_p + (n - p)r$

*Forme itérative d'une suite géométrique :* $v_{n+1} = v_n * q$

*Terme général d'une suite géométrique :* $v_n = v_0 * q^n$

*Formule globale d'une suite géométrique :* $v_n = v_p * q^{n-p}$

*Une suite est croissante si elle vérifie :* $u_{n+1} - u_n > 0$

*Une suite est décroissante si elle vérifie :* $u_{n+1} - u_n < 0$

*Somme de termes d'une suite arithmétique :*

$$S = \frac{(u_p + u_n)}{2} * ((n - p) + 1)$$

*Somme de termes d'une suite géométrique :*

$$S' = (v_p) * \frac{(1 - q^{(n-p)+1})}{1 - q} \quad si \quad q \neq 1$$