Les vecteurs
Dans le plan
Et dans l'espace

Table des matières

Retour Sommaire

Au sein de ce cours, nous discuterons de la notion de vecteur, un outil qui interviendra dans de nombreux autres chapitres (produit scalaire, produit vectoriel, nombre complexe…). Nous nous intéresserons au concept de « vecteur », ses propriétés et tenterons de comprendre l'utilité de cet outil.

I. Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Commençons simplement avec la question fondamentale qu'est-ce qu'un vecteur ? Je pense que pour comprendre cela, il est nécessaire de passer par la case définition. Dans ce cas, celle-ci est très simple.

A. Définition

Un vecteur est défini par les trois éléments suivants :

- Sa direction
- Son sens
- Sa norme

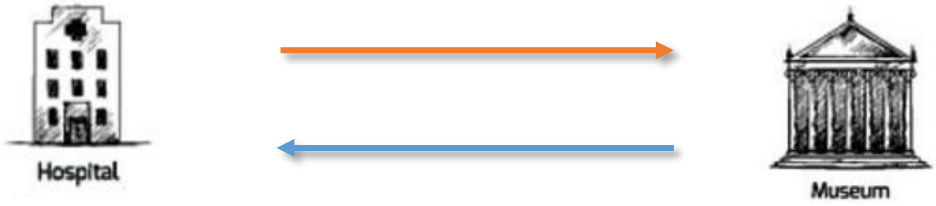
Dans l'univers des vecteurs, il sera courant d'utiliser un vocabulaire propre aux vecteurs. Ces termes auront probablement un sens se rapprochant d'autres termes que vous connaissez déjà.

Commençons par « *la direction* » :

La direction fait partie des termes souvent mal employés dans la vie quotidienne. Lorsqu'une personne vous demande une direction particulière, vous lui pointerez vers sa destination en lui donnant en fait deux informations (la direction et le sens).

Prenons l'exemple d'un trajet entre un musée et un hôpital. Nous sommes d'accord qu'il y deux possibilités de déplacement à savoir.

- Un déplacement de l'hôpital au musée
- Un déplacement du musée à l'hôpital



Si nous traçons donc une droite entre l'hôpital et le musée, nous obtenons *la direction*. En revanche nous n'aurons aucune idée du sens de déplacement « hôpital vers musée » ou « musée vers hôpital ». Cette seconde information serait donnée par *le sens*.

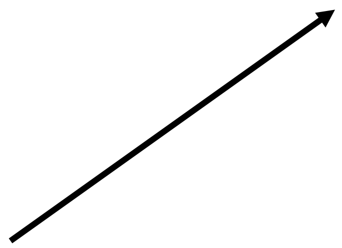
Une fois la direction obtenue, il est très simple de déterminer le sens en fonction du contexte étudié.

Parlons maintenant de *la norme.* La notion de norme d'un vecteur se rapproche de l'idée de longueur d'un segment bien qu'on ne parlera jamais de longueur d'un vecteur.

De nombreux étudiants assimilent souvent l'origine du vecteur comme étant une propriété de ce dernier, il n'en est rien. La définition d'un vecteur est indépendante de son origine.

B. Un peu de formalisme

Un vecteur sur votre copie devra toujours (sauf vecteur nul) être représenté par un segment indiquant la direction et par une flèche indiquant le sens (voir ci-dessous).



Lorsque qu'il sera temps de nommer notre vecteur, nous utiliserons deux notations :

- La notation simple $\vec{u}$, utilisant une lettre correspondant au nom du vecteur
- La notation composée $\overrightarrow{AB}$, utilisant deux points A et B indiquant ainsi le sens du vecteur à savoir de A vers B.

Lorsque vous devrez calculer une norme, sachez qu'il existe deux manières courantes de l'expliciter :

- Le formalisme utilisé en mathématique $\|\overrightarrow{AB}\|$
- Le formalisme utilisé en physique pour une force $\vec{F}$, l'intensité de la force (norme du vecteur force) sera notée tout simplement F.

Retour Sommaire

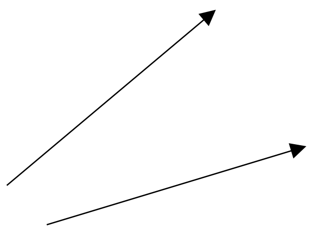
C. Egalité de vecteurs

On ne pourra considérer deux vecteurs comme égaux que si les trois propriétés vues plus haut qui les définissent sont identiques.

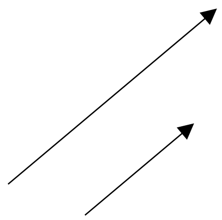
Deux vecteurs sont égaux s'ils possèdent :

- La même direction
- Le même sens
- La même norme

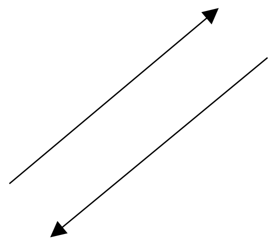
Quelques exemples de **non**-égalité :



- Même sens
- Même norme
- Directions différentes



- Même sens
- Même direction
- Normes différentes

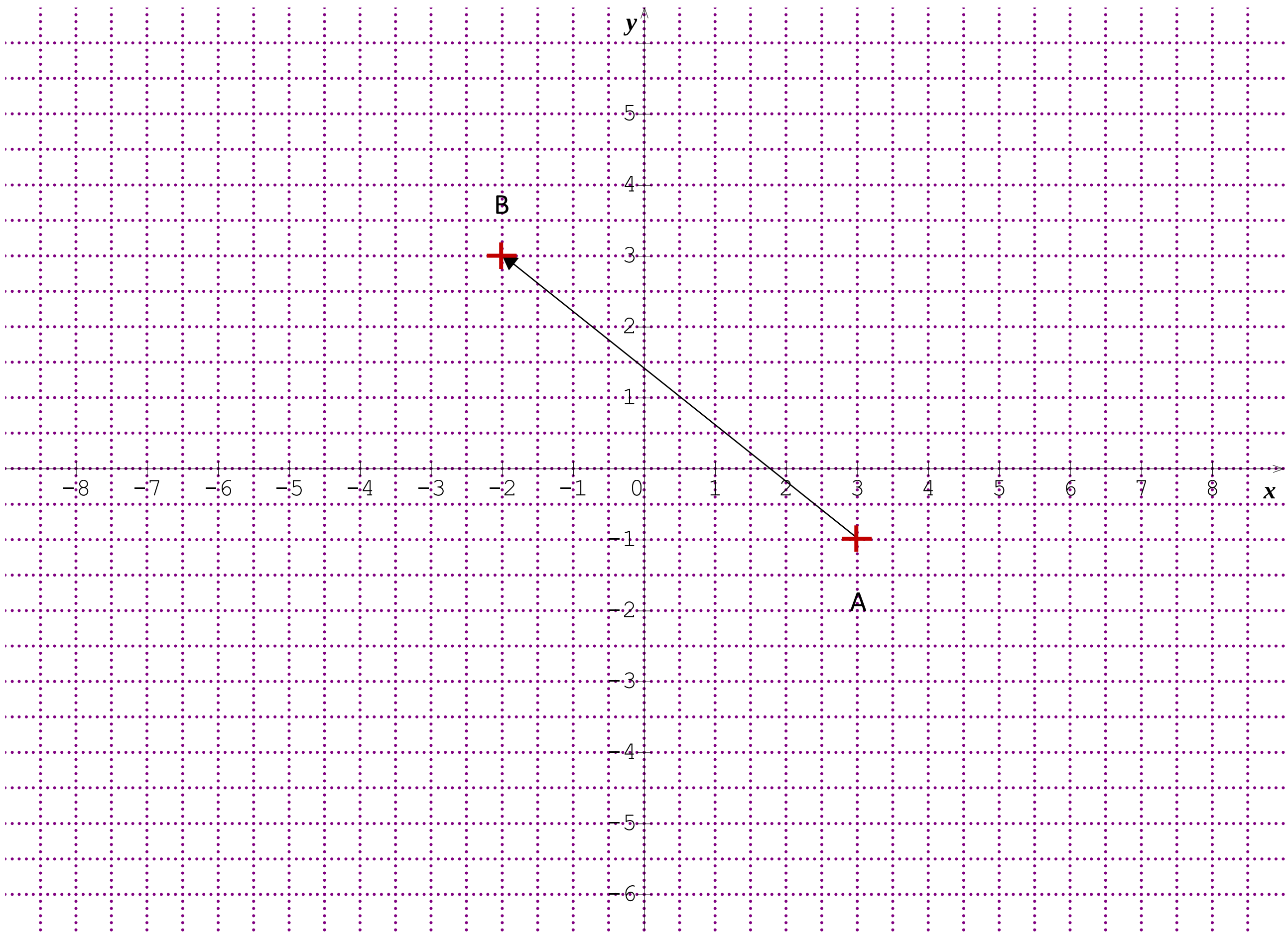


- Même norme
- Même direction
- Sens différents

Un cas particulier que vous rencontrez sera celui du *vecteur nul*. Ce dernier est un vecteur dont la norme est égale à zéro.

II. Le vecteur dans le plan et dans l'espace

Il a été vu précédemment que les propriétés de vecteur ne dépendent pas de son origine en revanche, il nous sera toutefois possible de manipuler cet outil dans un plan ou dans l'espace doté d'un repère.



Soit deux points A et B de coordonnées $A\binom{3}{-1}$ et $B\binom{-2}{3}$.

Nous utiliserons à partir de maintenant la notion verticale des coordonnées, extrêmement pratique dans le contexte des vecteurs.

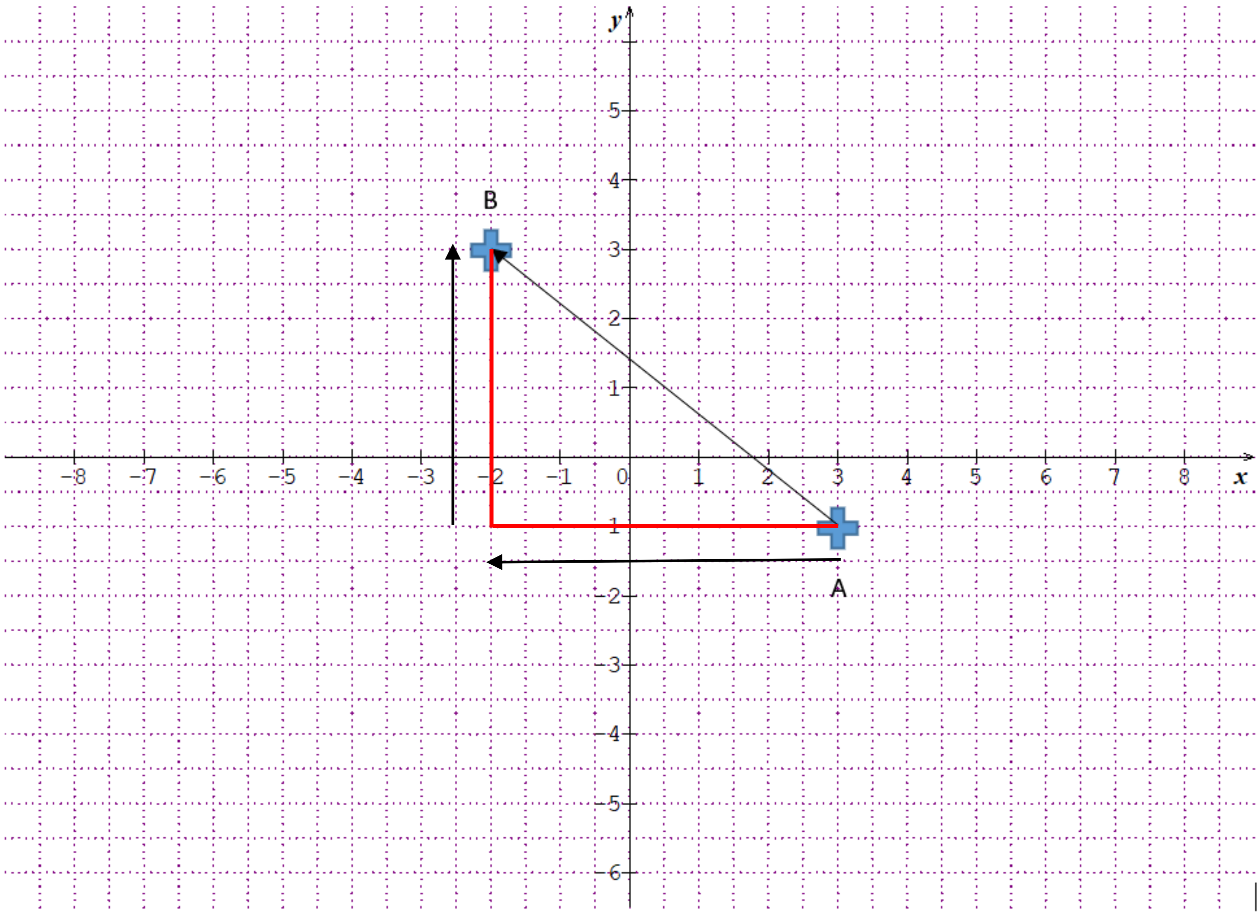
Si nous désirons étudier le vecteur $\overrightarrow{AB}$, il nous faudra donc tirer une flèche allant de A vers B. Il nous sera maintenant possible de déterminer les coordonnées du vecteur et la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Retour Sommaire

A. Calcul des coordonnées d'un vecteur

Il sera possible déterminer les coordonnées d'un vecteur à l'aide de sa représentation graphique (méthode graphique) ou à l'aide des coordonnées des points (méthode analytique). Quelque soit la méthode utilisée, il sera nécessaire d'accorder une grande importance au sens du vecteur, vos résultats en dépendront.

Méthode graphique



Utilisons la représentation précédente :

Le vecteur étudié est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Nous allons reprendre ici, des idées vues dans d'autres chapitres (équation de droite) en étudiant le déplacement horizontal et vertical en suivant le chemin conduisant du point A vers B.

Le déplacement horizontal est de $\Delta x = -5$

Le déplacement vertical est de $\Delta y = 4$

On obtient donc directement les coordonnées du vecteur :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

Méthode analytique

Avec cette méthode, nous allons utiliser uniquement les coordonnées des points dont le vecteur est issu.

Rappelons les informations fournies plus haut :

Deux points $A\binom{3}{-1}$ et $B\binom{-2}{3}$.

Les coordonnées de vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont déterminées à l'aide de la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}}$$

Dans notre cas, on obtiendra en remplaçant :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}(-2)-(3)\\(3)-(-1)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

Dans le cas d'une étude de vecteur dans l'espace la relation deviendra simplement :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$$

B. Calcul de la norme d'un vecteur

Il sera possible de déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ directement à partir de ses coordonnées mais aussi à partir des coordonnées des points dont il est issu.

Méthode directe

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2 + (y_{\overrightarrow{AB}})^2}}$$

Où $x_{\overrightarrow{AB}}$ et $y_{\overrightarrow{AB}}$ représentent les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dans le cas de l'étude dans le plan cette méthode est très réminiscente du théorème de Pythagore.

Dans le cas d'une étude de vecteur dans l'espace la relation deviendra :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2 + (y_{\overrightarrow{AB}})^2 + (z_{\overrightarrow{AB}})^2}$$

Méthode analytique

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Où $x_B, x_A, y_B \; et \; y_A$ représentent les coordonnées des points A et B.

Avec $A\binom{3}{-1}$ et $B\binom{-2}{3}$ on obtient :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{((-2) - (3))^2 + ((3) - (-1))^2}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2 + (4)^2} = \sqrt{25 + 40} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Dans le cas d'une étude de vecteur dans l'espace la relation deviendra :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

III. Opération sur les vecteurs

Les vecteurs sont des items mathématiques qui seront régis par les mêmes règles de calcul que les nombres et variables manipulées en troisième à quelques petites exceptions près.

Les règles qui seront conservées :

- L'adition
- La soustraction
- Le développement
- La factorisation

Illustrons cela par quelques exemples :

$$2\vec{w} + 3\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{u} + 5\vec{v}$$

Rassemblons les vecteurs identiques

$$2\vec{w} + 3\vec{u} - \vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{v} = \vec{0}$$

On remarque la convention d'avoir, lors d'une égalité vectorielle, toujours un vecteur de chaque coté de l'inégalité même si celui-ci est le vecteur nul. On simplifie :

$$2\vec{w} + 2\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{0}$$

Notre somme a été simplifiée.

Si le vecteur est composé de deux points, d'autres possibilités s'offre à nous.

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA}$$

Nous savons maintenant qu'un vecteur est en partie défini par sons sens. Cette propriété se traduit algébriquement.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ aura donc un sens opposé au vecteur $\overrightarrow{BA}$ pouvant s'exprimer :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$$

Concernant le développement et la factorisation, une particularité est propre aux vecteurs, tous les produits étudiés ici seront appelés « produit scalaire ». (ce dernier aura son propre chapitre dédié)

$$2\vec{w}.(2\vec{u} + \vec{v})$$

Se développera tel que

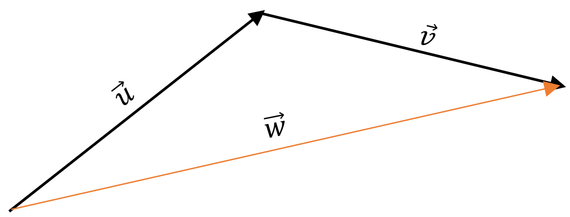
$$4(\vec{w}.\vec{u}) + 2\vec{w}.\vec{v}$$

IV. La relation de Chasles

Commençons par une description visuelle. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Nous désirons construire le vecteur $\vec{w}$ tel que :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

Il a été vu précédemment que les propriétés d'un vecteur ne dépendaient pas de son origine. Il est donc possible de déplacer nos deux vecteurs de telle manière à créer un chemin. Le point de départ de ce chemin et le point d'arriver permettrons de déduite le vecteur résultant $\vec{w}$.



On remarque alors qu'un vecteur peut être fabriqué à partir de plusieurs autres vecteurs. C'est de cette idée que nous allons pouvoir expliciter *la relation de Chasles*. Celle-ci nous permettra de décomposer ou de simplifier l'écriture d'un vecteur.

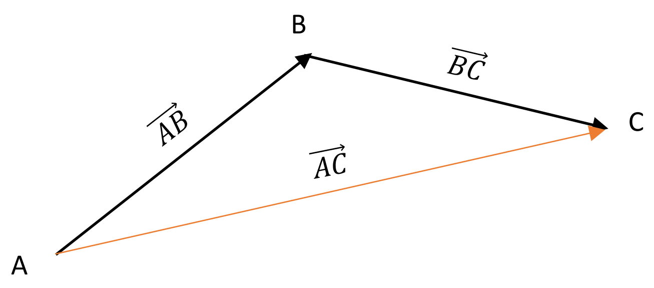
La relation de Chasles a pour expression :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$ pour une décomposition ou

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$ pour une simplification

Retour Sommaire

En reprenant l'exemple précédent, il est facile de comprendre la relation.



En dépit de sa simplicité apparente la relation de Chasles est souvent mal comprise des étudiants. Un certain nombre de règles de prudence sont à observer lors de la manipulation de cette dernière.

Quelques exemples de **non**-application de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AC}$$

Ici le signe devant $\overrightarrow{AB}$ et devant $\overrightarrow{BC}$ est différent, la relation ne s'applique donc pas.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AC}$$

La lettre commune (ici le B) n'est pas positionnée correctement.

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AC}$$

Dans cet exemple le coefficient devant les deux vecteurs est différent, la relation ne s'applique donc pas.

Il est important de rendre l'utilisation de la relation de Chasles simple en modifiant l'aspect visuel de l'expression de la somme (voir exemple ci-dessous).

Exemple :

Soit la somme de vecteurs à simplifier :

$$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$

Regroupement des vecteurs semblables :

$$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{BC}$$

Transformation du vecteur : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

$$2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}$$

Ici, nous ne pouvons pas utiliser la relation de Chasles, la simplification est terminée.

Autre exemple de simplification :

$$-\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$$

Dans ce cas l'utilisation de la relation de Chasles est nécessaire pour avancer dans notre simplification car aucun rassemblement direct n'est possible.

On remarque en revanche deux vecteurs ayant le même coefficient et une lettre en commun.

$$2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$$

La lettre en commun étant le B, celle-ci est à l'extérieur ce qui peut rendre l'utilisation de de la relation Chasles difficile. Rien ne nous empêche de la transformer.

$$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \quad \text{ou} \quad 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

On obtient donc

$$2\overrightarrow{AC}$$

Revenons à la somme totale

$$-\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$$

V. Colinéarité

L'étude de la colinéarité est un outil nécessaire car il ouvre de nombreuses et diverses applications.

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils vérifient la relation :

$$\boxed{\vec{u} = k\vec{v}}$$

Avec k appartenant à $\mathbb{R}$.

Cette relation établie, on déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Exemple :

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-3}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{-4}{6}$

Pour montrer que ces deux vecteurs sont colinéaires plusieurs méthodes sont possibles. Chacune de ces deux méthodes nécessite de connaître les coordonnées de chacun des vecteurs.

Première Méthode

Vérifions que le produit des coordonnées suivant est égal à zéro.

$$\boxed{x_{\overrightarrow{AB}} * y_{\overrightarrow{BC}} - x_{\overrightarrow{BC}} * y_{\overrightarrow{AB}} = 0}$$

Dans notre cas, il devient :

$$(2) * (6) - (-4) * (-3) = 12 - 12 = 0$$

Le produit est nul, nos deux vecteurs sont colinéaires. Cette méthode est extrêmement directe, en revanche elle ne permet pas de déterminer la valeur de k, ce que la méthode suivante nous permettra d'obtenir.

Deuxième Méthode

Cette fois-ci, nous allons utiliser la une relation de proportionnalité sur chacune des coordonnées, si le résultat des rapports est le même, les vecteurs sont colinéaires.

On cherche à vérifier la relation suivante :

$$\boxed{\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{BC}}} = k}$$

Dans notre cas l'expression devient :

$\overrightarrow{AB}\binom{2}{-3}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{-4}{6}$

$$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Les valeurs des rapports obtenues sont bien égales, les deux vecteurs sont colinéaires avec

$$k = -\frac{1}{2}$$

On peut donc établir la relation :

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Grâce à cette expression, il est possible de déduire un certain nombre d'informations intéressantes.

- Le signe des deux vecteurs est opposé, ce qui signifie que les vecteurs sont de sens opposés.
- De plus, on remarque la présence d'une lettre commune aux deux vecteurs, signifiant que les trois points A, B et C sont alignés.
- Enfin, il sera tout à fait possible de manipuler l'expression en fonction de vos besoins.

Exemple :

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

Ou

$$\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$$

VI. Fiche récapitulative

Un vecteur est défini par :

- Sa direction
- Son sens
- Sa norme

Deux vecteurs sont égaux s'ils possèdent :

- La même direction
- Le même sens
- La même norme

Calcul des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le plan : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Calcul de la norme d'un vecteur dans le plan :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2 + (y_{\overrightarrow{AB}})^2}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Egalité et vecteurs : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Relation de colinéarité : $\vec{u} = k\vec{v}$

Vérification de la colinéarité : $x_{\overrightarrow{AB}} * y_{\overrightarrow{BC}} - x_{\overrightarrow{BC}} * y_{\overrightarrow{AB}} = 0$

Ou

$$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{BC}}} = k$$