L'étude de Fonction

Table des matières

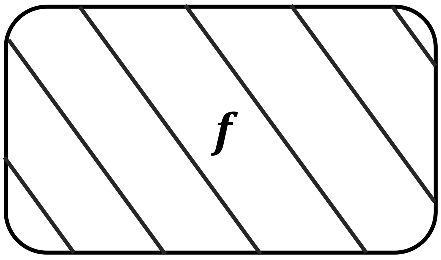
Durant mes premières années d'enseignement, j'ai pu remarquer que la notion même de fonction mathématique échappait à bon nombre d'étudiant. Cette notion est pourtant au cœur de l'enseignement mathématique. Il est pratiquement impossible de manipuler les mathématiques sans en comprendre ses fondements. Je me propose donc ici de faire redécouvrir ce concept.

I. Qu'est-ce qu'une fonction ?

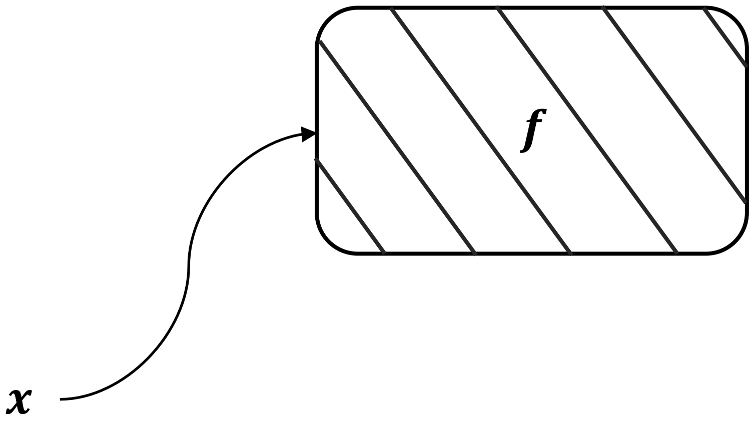
Ici, nous tenterons de nous réapproprier les notations mathématiques (*formalisme*) par le biais d'exemple comme celui ci-dessous.

Une étude de fonction repose sur la manipulation d'outils mathématiques (tableau de signe, tableau de variation, limites…) afin de comprendre le « fonctionnement » de cette dernière.

Partons du principe que notre fonction est une machine dont nous ne connaissons rien, nous l'apparenterons à une boite appelée f.



Pour que cette machine soit capable de produire quoi que ce soit, il est nécessaire de faire entrer de la matière que l'on nommera x qui deviendra plus tard notre *variable.*

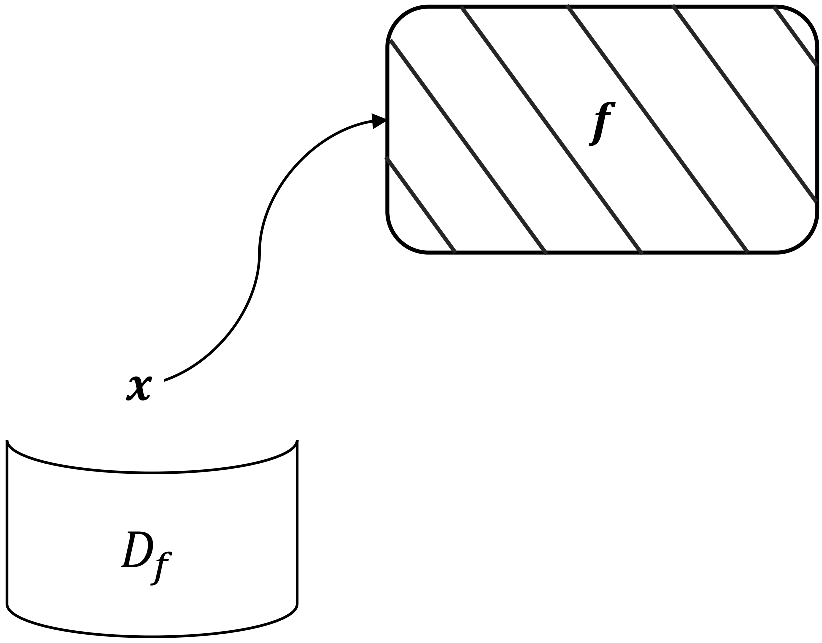


Or il n'est pas toujours possible de faire rentrer n'importe quel type de matière dans cette machine. Il est donc nécessaire d'utiliser de la matière que la machine f soit capable de transformer. Cette matière sera donc triée et répertoriée dans des boites que nous appellerons *ensembles*.

La somme de ces ensembles sera appelée *ensemble de définition*, et sera noté D_f.

Cette notion d'ensemble de définitions est malheureusement trop souvent laissée de côté alors qu'elle est pourtant essentielle à l'étude de n'importe quelle fonction.

Dans une majorité des cas, il vous sera donné dans le cadre de l'exercice mais pas toujours… Il est donc primordial d'être capable de le retrouver seul.



Pour alimenter notre machine, il nous faudra donc piocher dans l'ensemble de définition D_f des valeurs de x.

L'ensemble de définition utilise sa propre notation qui sera également utilisée par de nombreux autres outils mathématiques (tableau de signe, tableau de variation, ensemble de dérivation…).

II. Définition et ensemble

Vous retrouverez ci-dessous un certain nombre d'ensemble particulier qu'il sera bon de connaitre. En revanche, vous pourrez également manipuler une infinité d'ensembles quelconques liés au contexte de l'exercice.

Voyons ensemble quelques notations utilisées :

$\mathbb{N}$

L'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$ comprend les termes entiers positifs de 0 à l'infini $+\infty$ $(0, 1, 2, 3\ \ldots)$.

$\mathbb{Z}$

L'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$ comprend tous les termes entiers qu'ils soient positifs ou négatifs de $-\infty$ à $+\infty$. $(\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots)$

$\mathbb{R}$

L'ensemble des réels noté $\mathbb{R}$ comprend tous les nombres qu'ils soient entiers ou décimaux de $-\infty$ à $+\infty$. $(-3.5, 12.1 \ldots)$. Une de ses notations les plus communes est $]-\infty\,;+\infty[$.

$\mathbb{C}$

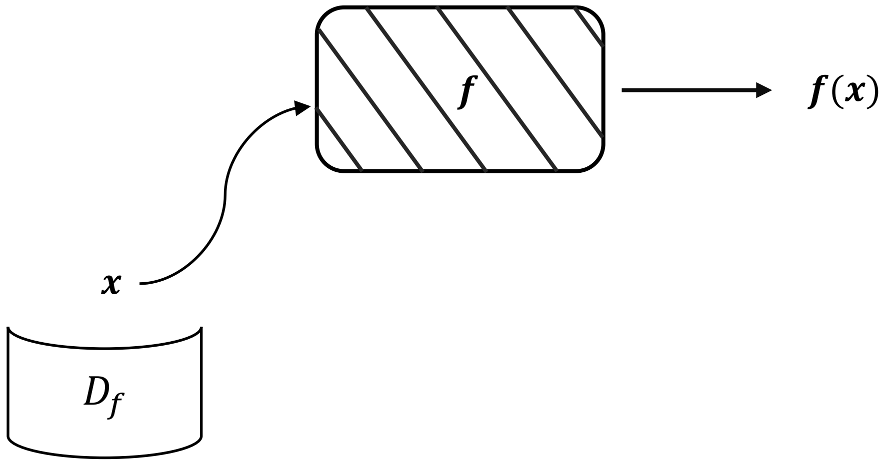
L'ensemble des complexes noté $\mathbb{C}$ comprend l'ensemble des réels plus les valeurs construites à partir de i telle que $i^2 = -1$. $\mathbb{C}$ représente l'ensemble plus grand que nous étudierons.

Attention : Cette liste n'est pas exhaustive mais représente les ensembles les plus couramment utilisés.

Retour Sommaire

III. Image et antécédent

Nous avons passé en revue la notion d'ensemble, il nous reste maintenant à répondre à cette question qu'est-ce que produit la machine f ?



Une fois la valeur de x transformée par f, nous obtiendront alors une valeur notée $f(x)$. Les valeurs de x portent le nom *d'antécédents* et les valeurs de $f(x)$ sont *les images*.

Exemple :

Soit une fonction f définie sur ℝ telle que : $f(x) = x^2 + 2$

- Piochons aléatoirement une valeur de x dans l'ensemble ℝ. Soit $x = -3$.
- La nouvelle expression de $f(x)$ devient : $f(-3) = (-3)^2 + 2$
- Le résultat obtenu est : $f(-3) = 11$

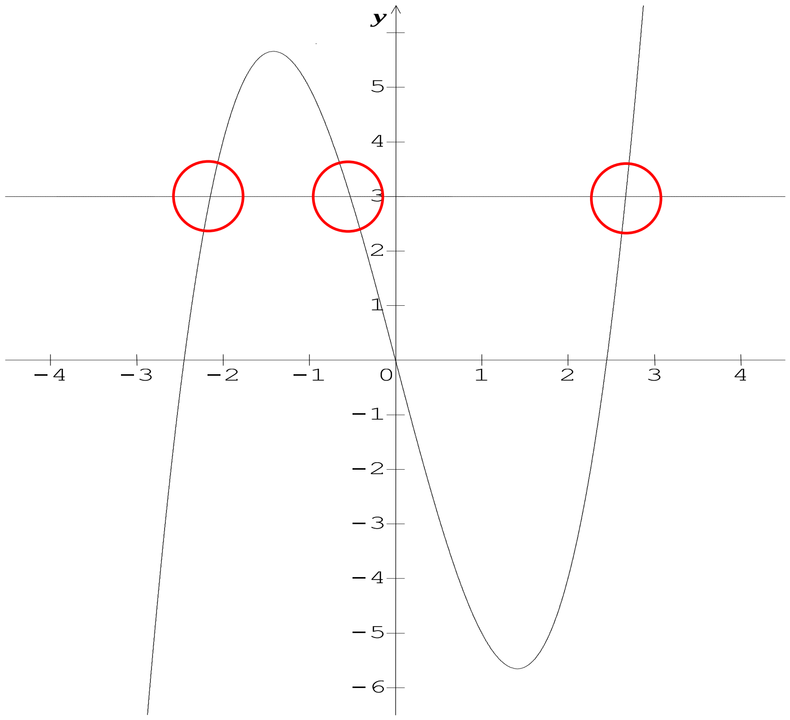
a ou $f(x)$ est appelé **image** de x par la fonction f

x est appelé antécédent

$$f(x) = a$$

Il est possible pour une valeur d'image $f(x)$ d'obtenir plusieurs antécédents associés. En revanche, une valeur d'antécédent ne pourra posséder qu'une valeur d'image associée.

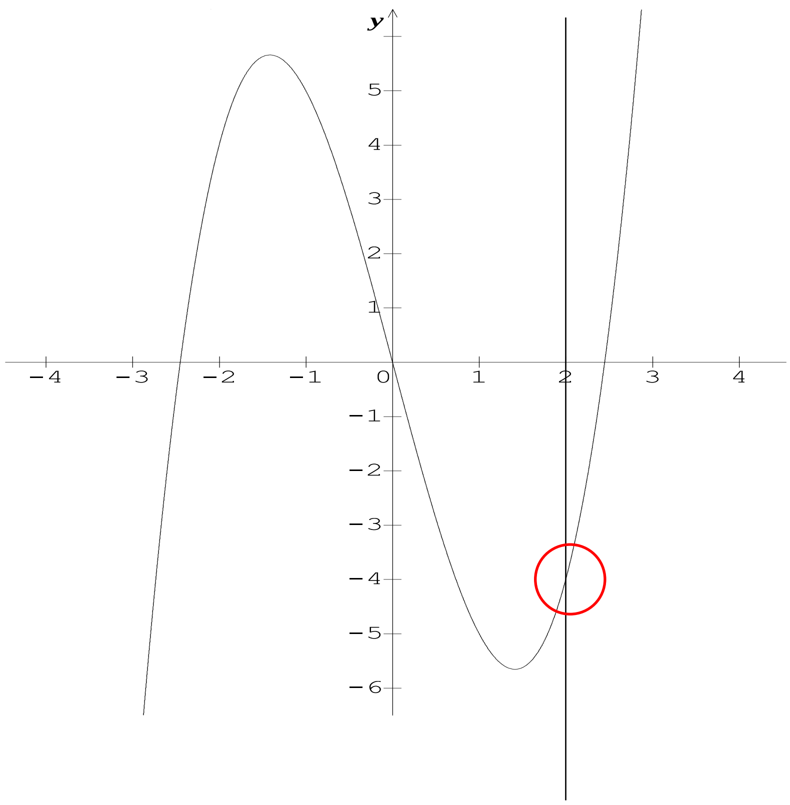
Exemple :



Dans cet exemple ci-contre est dessinée une courbe représentative d'une fonction quelconque.

Pour une valeur d'image $f(x) = 3$, on trace une droite horizontale. Puis, on compte le nombre de points d'intersection entre la droite est la courbe représentative de f.

Ici, ils sont au nombre de 3, il y a donc 3 antécédents ayant pour image (3).



Dans cet exemple ci-contre est dessinée une courbe représentative d'une fonction quelconque.

Pour une valeur d'antécédent $x = 2$, on trace une droite verticale puis on repère le point d'intersection entre la droite est la courbe.

Il semble que l'image de l'antécédent $x = 2$ soit $f(2) = -4$.

On pourra conclure que l'antécédent 2 à pour image -4 par la fonction f.

Retour Sommaire

Cette suite d'exemples nous a permis de comprendre également que nous devons lire les valeurs de x et par extension D_f sur l'axe des **abscisses** et les valeurs de $f(x)$ ou image sur l'axe des **ordonnées**.

Pour une valeur de x quelconque, il sera possible de représenter par un point la valeur de x et de son image $f(x)$ associée. Exemple, le point A tel que $A(x_A\,; f(x_A))$.

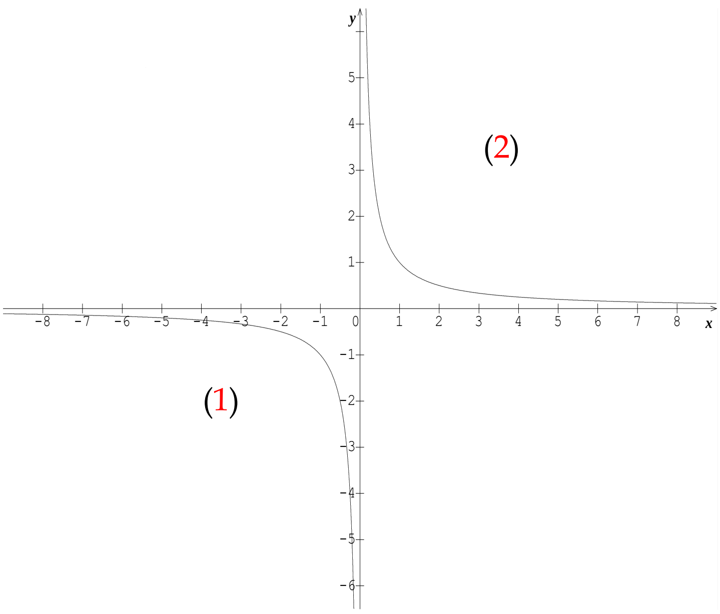
IV. Etude de fonction

Le concept de fonction a été introduit relativement tôt (littéralement en 3ème, mais réellement beaucoup plus tôt…). De nombreux ajouts ont été fait année après année rendant ce concept relativement indigeste. Je vous propose donc de prendre un peu de hauteur et de tenter de revisualiser chacune des propriétés et outils liées à l'étude de fonction.

Qu'est-ce qu'une étude de fonction ?

L'ensemble de définition a été vu précédemment, donc l'ensemble des valeurs que la fonction était capable de transformer. Assez tôt dans l'apprentissage des mathématiques, nous apprenons à utiliser la représentation graphique. Malheureusement, celle-ci ne peut que très rarement être utilisée comme forme de justification, sauf si cela est énoncé par l'exercice (Déterminer **graphiquement**…).

Cette représentation est essentielle pour comprendre l'ensemble des propriétés utilisées lors de l'étude de fonction. Car oui, le but de l'étude de fonction est de chercher à déterminer un maximum d'informations concernant cette dernière. Prenons en exemple la fonction suivante :



Est représentée ci-contre la fonction inverse :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Il est possible de constater que la fonction est **discontinue en $x = 0$** et continue sur le reste de son ensemble.

Une partie (1) est **décroissante** et se situe en **dessous de l'axe des abscisses** l'autre partie (2) est également **décroissante** mais cette fois **au-dessus de l'axe des abscisses.**

Retour Sommaire

Chacune de ces observations peut conduire à la détermination de certaines propriétés mathématiques. Telles que :

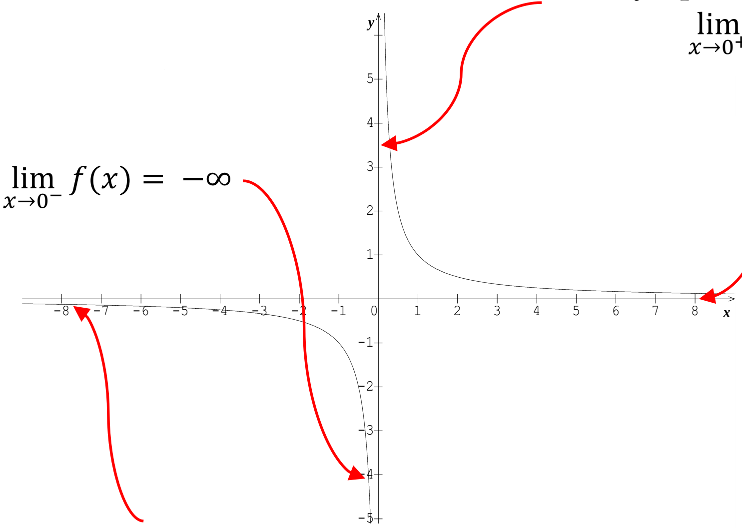
*« Il est possible de constater que la fonction est **discontinue en 0** et continue sur le reste de son ensemble. »*	Se traduira par : $\Leftrightarrow$	L'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R}^*$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ou $D_f =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;+\infty[$
*« Une partie est **décroissante** et se situe en **dessous de l'axe des abscisses** »*	Se traduira par : $\Leftrightarrow$	f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,0[$
*« l'autre partie est également **décroissante** mais cette fois **au-dessus de l'axe des abscisses.** »*	Se traduira par : $\Leftrightarrow$	f décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty[$ et $f(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

En terminale, de nouveaux outils seront introduits tels que les limites, les asymptotes… Ce qui permet de compléter notre étude.

Asymptote verticale suivant $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$



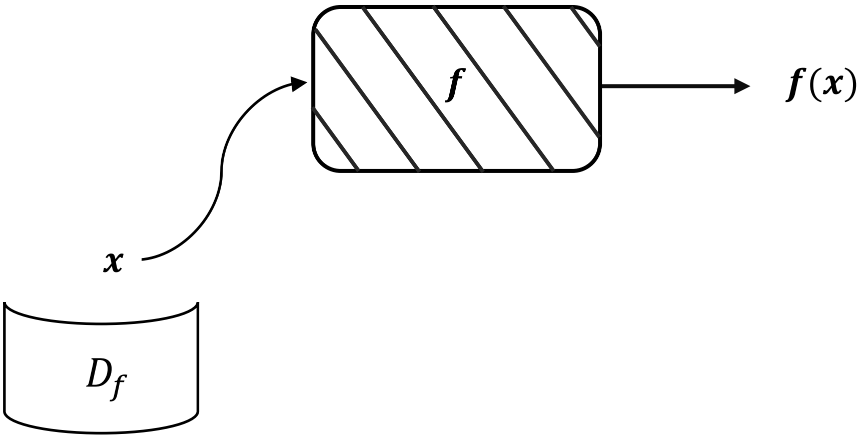
Asymptote horizontale suivant $f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0^+$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0^-$

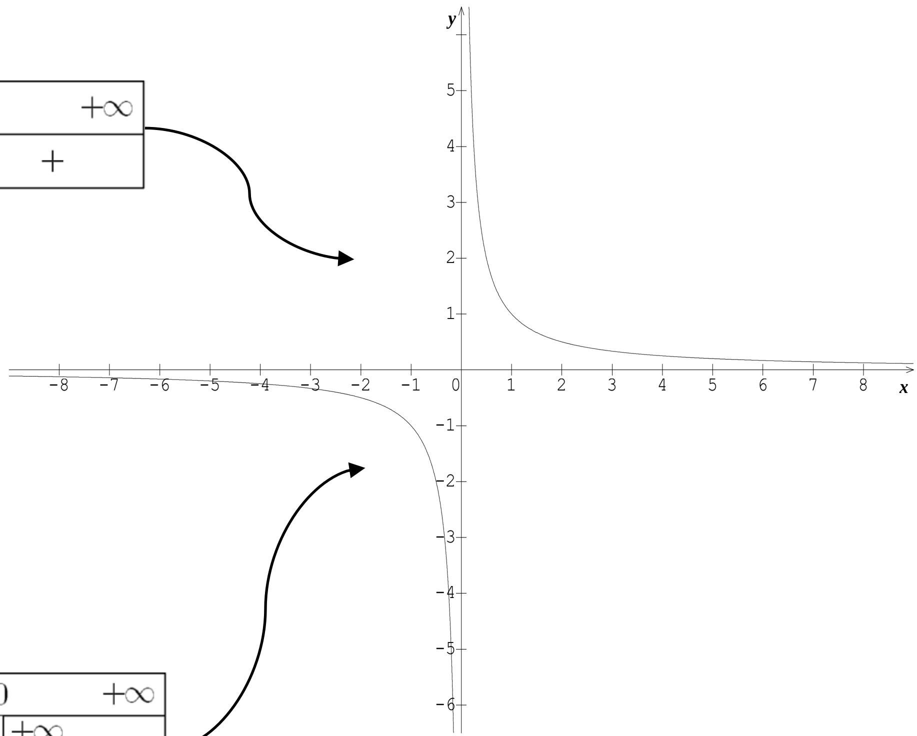
L'exemple étudié permet de constater l'étendue des possibilités d'étude et surtout d'associer les outils utilisés pour effectuer cette dernière. Par exemple :

- La dérivée est un outil permettant d'accéder à la détermination de la croissance, de la convexité et des minima maxima d'une fonction…
- Les tableaux de signes (3) et de variations (4) permettent quant eux de compiler visuellement un ensemble d'information lié à la fonction étudiée.



x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$signede(1/x)$	$-$	$+$

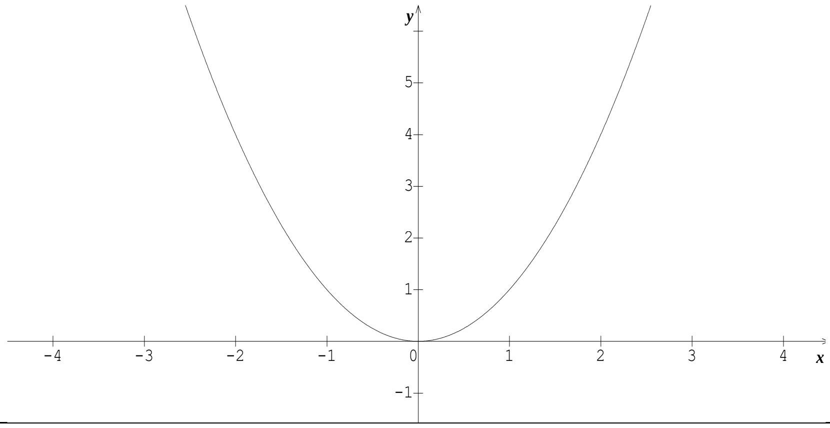
(3)

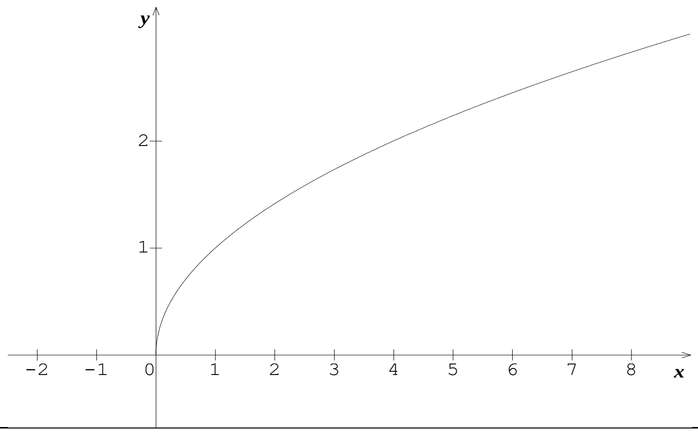


x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$variationde(1/x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$

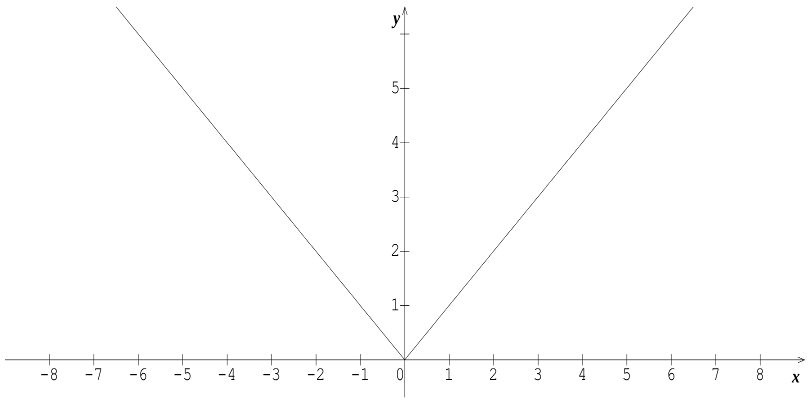
(4)

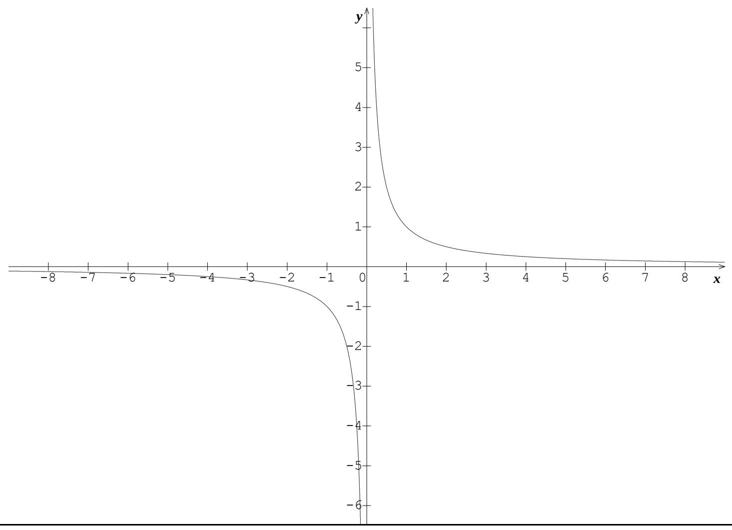
V. Fonction usuelle et propriété

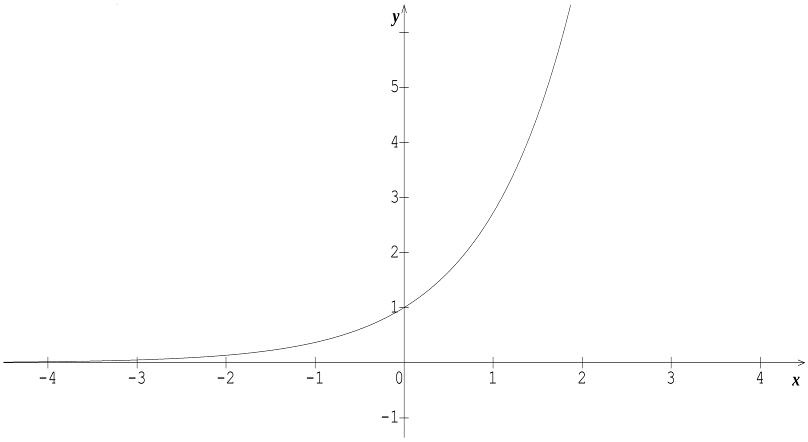
Fonction usuelle	*Représentation graphique*
$f(x) = x^2$	
Ensemble de définition f	$D_f = \mathbb{R}$ ou $D_f =]-\infty\,;\,+\infty[$
Signe de la fonction f	$f(x) \geq 0$
Variations de la fonction f	f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$
Limites de la fonction f	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

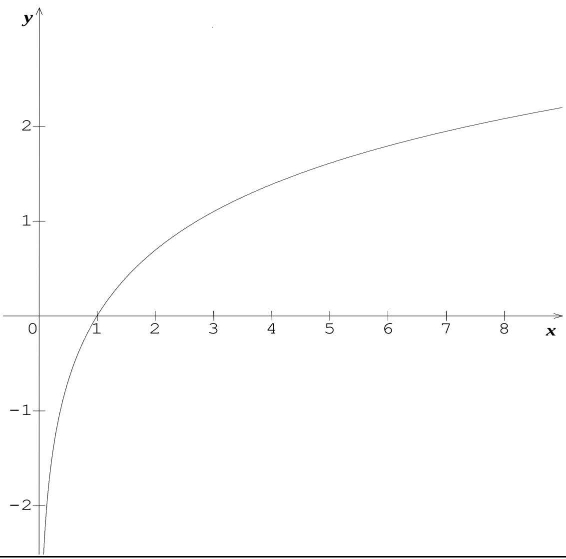
Fonction usuelle	*Représentation graphique*
$f(x) = \sqrt{x}$	
Ensemble de définition f	$D_f = \mathbb{R}^+$ ou $D_f = [0\,;\,+\infty[$
Signe de la fonction f	$f(x) \geq 0$
Variations de la fonction f	f est croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$
Limites de la fonction f	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Retour Sommaire

Fonction usuelle	*Représentation graphique*
$f(x) = \mid x \mid$	
Ensemble de définition f	$D_f = \mathbb{R}$ ou $D_f =]-\infty\,;\,+\infty[$
Signe de la fonction f	$f(x) \geq 0$
Variations de la fonction f	f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$
Limites de la fonction f	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Fonction usuelle	*Représentation graphique*
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	
Ensemble de définition f	$D_f = \mathbb{R}^*$ ou $D_f =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;+\infty[$
Signe de la fonction f	$f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,0[$ et $f(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$
Variations de la fonction f	f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty[$
Limites de la fonction f	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

Fonction usuelle	*Représentation graphique*
$f(x) = e^x$	
Ensemble de définition f	$D_f = \mathbb{R}$ ou $D_f =]-\infty\,;\,+\infty[$
Signe de la fonction f	$f(x) > 0$
Variations de la fonction f	f est croissante sur $[-\infty\,;\,+\infty[$
Limites de la fonction f	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Fonction usuelle	*Représentation graphique*
$f(x) = \ln(x)$	
Ensemble de définition f	$D_f = \mathbb{R}^{*+}$ ou $D_f =]0\,;\,+\infty[$
Signe de la fonction f	$f(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et $f(x) \geq 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$
Variations de la fonction f	f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
Limites de la fonction f	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Retour Sommaire

VI. Fiche récapitulative

Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}$

Ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

Ensemble des réels : $\mathbb{R}$

Ensemble complexes : $\mathbb{C}$

Les images $f(x)$ *par la fonction* f *se lisent sur :* l'axe des ordonnées (axe des y)

Les antécédents x *par la fonction* f *se lisent sur :* l'axe des abscisses (axe des x)