Polynôme
Du second degré

Table des matières

La notion de polynôme abordée en seconde mais réellement introduite en première est, pour beaucoup d'étudiants, quelque peu confuse. Nous essayerons, ici, de clarifier tout ce qui gravite autour de celle-ci. Pour cela nous aurons besoin d'expliciter :

- La forme développée
- La forme factorisée
- La forme canonique

Chacune de ces formes présente des intérêts particuliers qui seront bon de connaitre. Rappelons d'abord ce qu'est un trinôme du second degré (polynôme du second degré à trois membres). Dans la plupart des manuels scolaires, il sera présenté de la sorte :

$$\boxed{f(x) \; = \; ax^2 + bx + c}$$

On retrouve bien ici la présence de trois termes « ax^2 », « bx » et « c ». Il sera possible de trouver des formes altérées de ce dernier avec par exemple « $c = 0$ » et « $b = 0$ ». Le polynôme ne pourra plus être appelé trinôme dans ces différents cas.

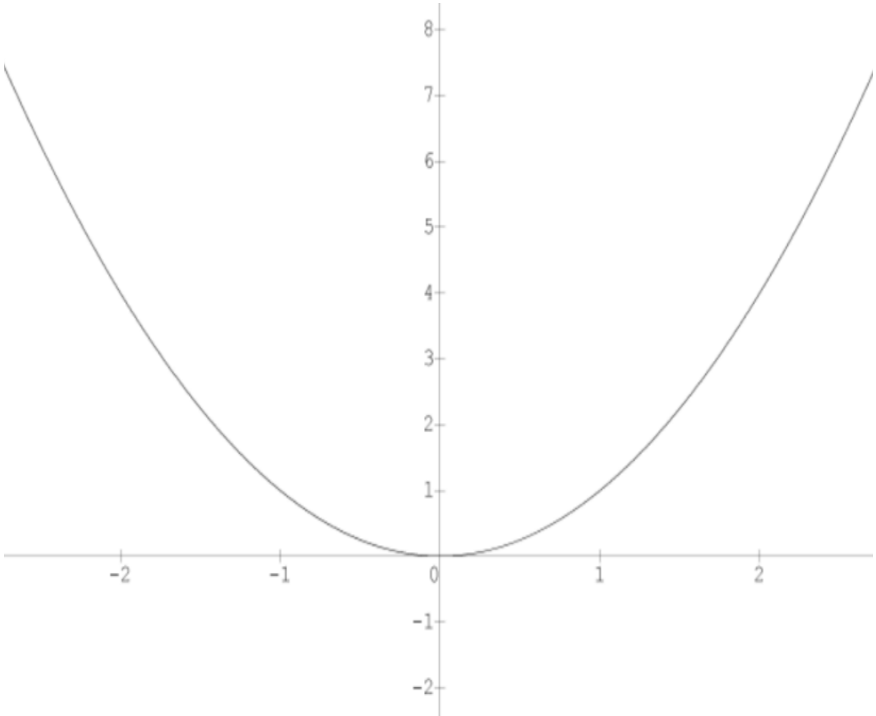
Seul « a » devra être différent de 0, sinon la forme obtenue ne sera plus un polynôme du second degré car la partie x^2 aura disparue. Pour l'ensemble des fonctions mathématiques, il est important d'avoir une idée de leur représentation graphique. En effet, grâce à elle, de nombreuses propriétés pourront être retenues plus facilement.

Avant de commencer, il est nécessaire de faire un petit rappel.

I. Polynôme du second degré et propriétés

A. La fonction carrée « x^2 »

Voici ci-dessous une représentation graphique de la fonction x^2 :



L'intérêt de connaitre la représentation graphique d'une fonction est de permettre de mémoriser un certain nombre de propriétés visuellement.

- Soit la fonction $g(x) = x^2$ présente un axe de symétrie qui est ici l'axe des ordonnées.
- La fonction est également positive et définie sur $\mathbb{R}$.
- En étudiant sa croissance, on remarque qu'elle est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et croissante sur $[\,0\,;\,+\infty[$.
- La courbe représentative de cette fonction est appelée *une parabole*.

Nous retrouverons nombre de ces notions dans l'étude de nos trinômes du second degré.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

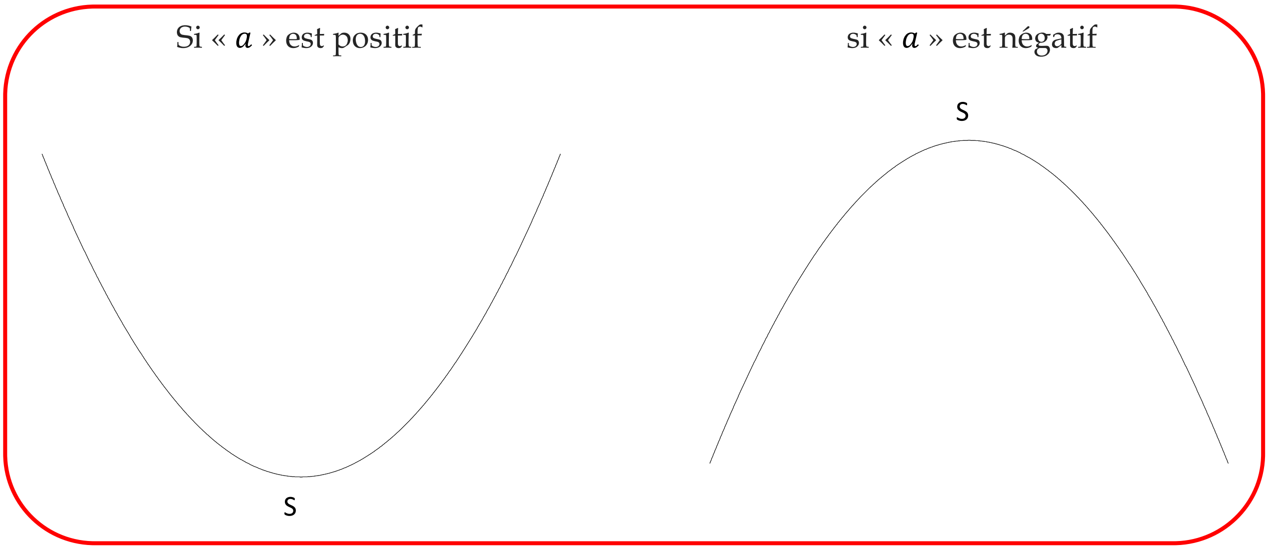
Retour Sommaire

Dans un premier temps, il est nécessaire de définir les constantes a, b et c. Ce sont simplement des valeurs piochées dans $\mathbb{R}$. Ici, nous les garderons sous la forme littérale dans le but d'établir des généralités.

Tout d'abord, nous allons étudier l'évolution de la fonction lors du changement de certains paramètres.

B. Croissance et signe de a

« a » est un paramètre très intéressant car le signe de celui-ci nous permet de déduire immédiatement la croissance de la courbe représentative de *f*.



La première chose que l'on remarque aisément est que comme la fonction « x^2 », la courbe représentative d'un trinôme du second degré est une parabole. La deuxième chose qui est rapidement visualisable est que la croissance entre ces deux exemples est inversée :

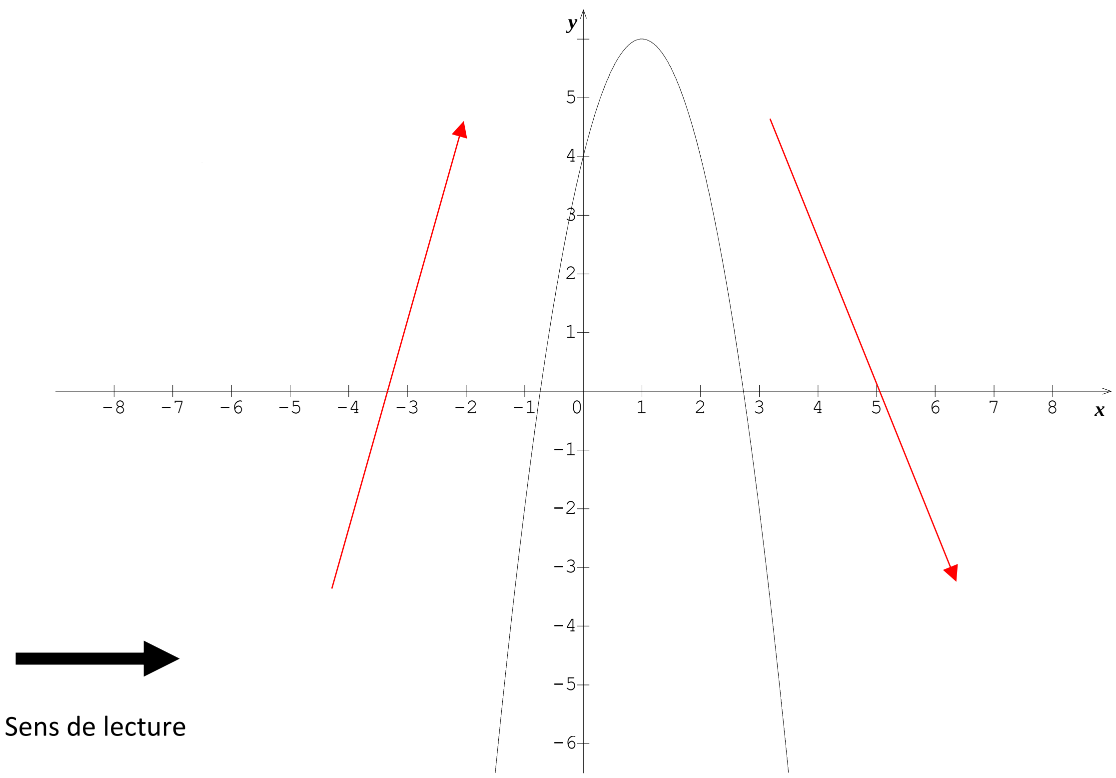
- Dans le premier cas la fonction est décroissante sur $]-\infty\,; x_s[$ et croissante sur $[x_s\,;\,+\infty[$.
- Dans le second cas la fonction est croissante sur $]-\infty\,; x_s]$ et décroissante sur $]x_s\,;\,+\infty[$.

La valeur « x_s » représente, ici, l'abscisse du point S appelé *sommet*. Ses coordonnées complètes sont $\mathrm{S}(x_s\,;\,y_s)$.

On remarque une grande similarité entre le polynôme du second degré et la fonction « x^2 ». En effet le coefficient devant « x^2 » est 1. Celui-ci étant positif la fonction x^2 sera décroissante puis croissante. La fonction « x^2 » peut être considérée comme un cas particulier de polynôme du second degré.

Exemple :

Soit le polynôme $f(x) = -2x^2 + 4x + 4$ et sa représentation :



Dans le cas où la représentation de la fonction n'est pas visible, il serait possible de déterminer tout de même sa croissance en étudiant le signe de a.

Ici $a = -2$, il est donc négatif, on déduit que la fonction est *croissante puis décroissante*.

Dans le cas où cette fois-ci seule la représentation était connue, en observant le fait que la fonction était croissante puis décroissante, on déduisait que $a < 0$.

On peut se demander légitiment, pourquoi est-il nécessaire de se rappeler de ces informations ?

Au lycée une vaste partie du programme des mathématiques tourne autour de l'étude de fonction. Les outils vus précédemment nous permettent d'étudier presque instantanément cette dernière et gagner ainsi un temps précieux.

C. Coordonnées du sommet

Pour déterminer les coordonnées du sommet d'un polynôme, nécessaire à une étude plus rigoureuse de la croissance, il nous faut faire appel à quelques notions vues dans le chapitre sur la *forme canonique*.

Rappel :

$$x_s = \frac{-b}{2a} \qquad ou \qquad \boxed{\alpha = \frac{-b}{2a}}$$

Et

$$y_s = f(x_s) \qquad ou \qquad \boxed{\beta = f(\alpha)}$$

Ces deux coordonnées sont plus généralement présentées sous la forme α et β soit $S(\alpha \; ; \; \beta)$.

Exemple :

Reprenons le polynôme $f(x) = -2x^2 + 4x + 4$:

Il est relativement simple d'utiliser les formules vues précédemment une fois les paramètres identifiés :

Identification :

- $a = -2$
- $b = 4$
- $c = 4$

Déterminons maintenant les coordonnées du sommet :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 * (-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Et

$$\beta = f(\alpha)$$

Remplaçons la valeur de α dans l'expression de f :

$$f(\alpha) = -2\alpha^2 + 4\alpha + 4$$

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) + 4$$

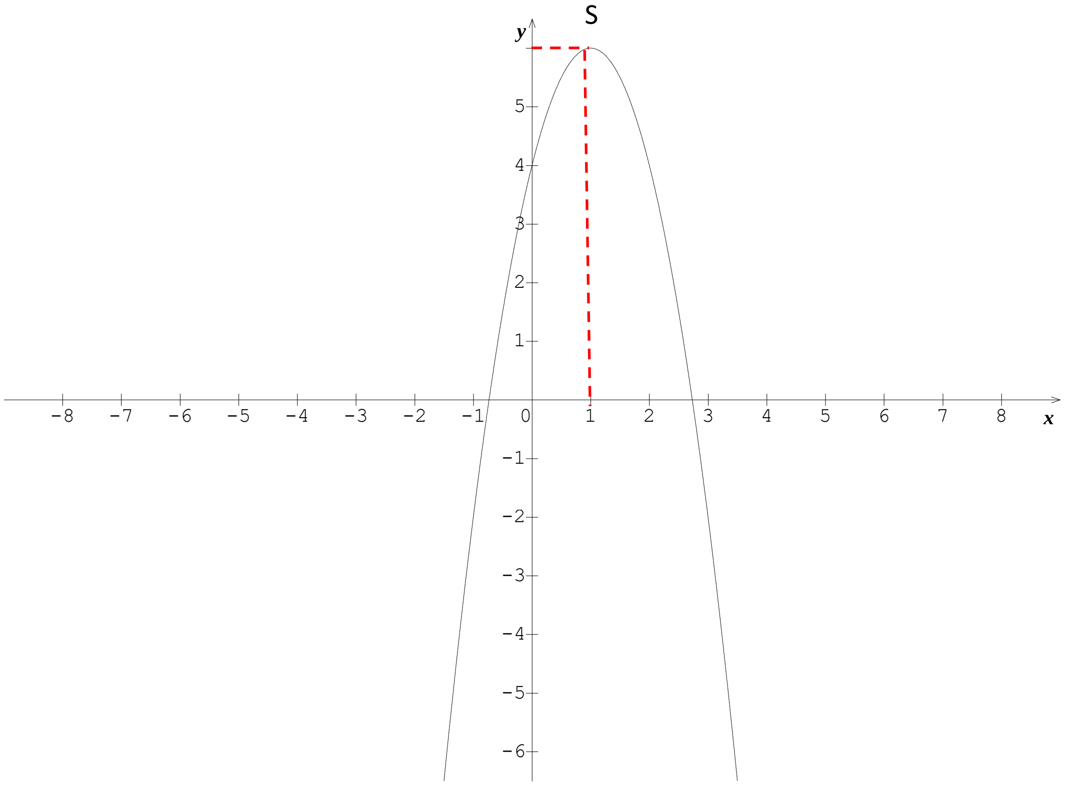
$$f(1) = 6$$

$$\beta = 6$$

Les coordonnées du sommet peuvent donc être présentées de la manière suivante :

$$S(1,\ 6)$$

Vérifions cela à l'aide de la représentation graphique :



Les coordonnées du sommet S sont bien vérifiées $S(1,\ 6)$.

II. Résolution d'un trinôme du second degré

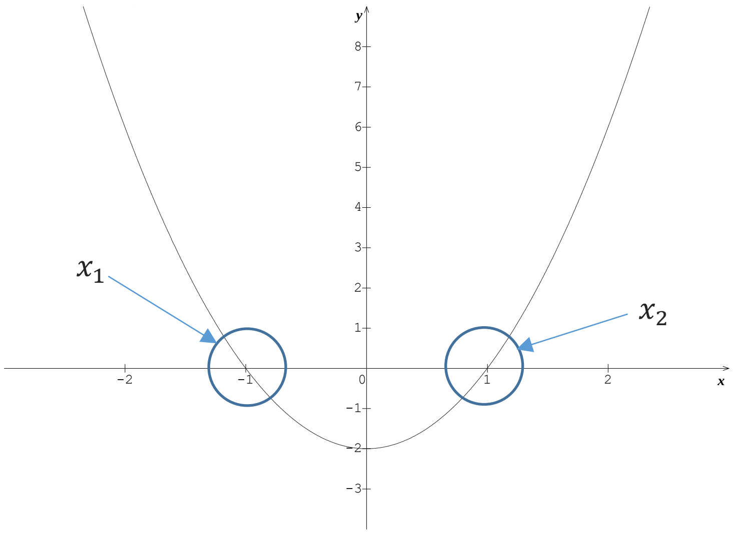
Il vous sera souvent demandé de résoudre de tels polynômes. Cela n'est rarement une difficulté en soit, cependant bon nombre d'étudiants passe outre la signification du concept et se retrouve confus lorsque la consigne n'est pas présentée de cette dernière manière.

Que signifie donc résoudre un polynôme du second degré ?

Cela signifie trouver les valeurs de la variable, dans notre cas x qui vérifient l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Concrètement, cela revient à déterminer, si elles existent, les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative du polynôme et l'axe des abscisses. Comme montré ci-dessous :



Ces valeurs x_1 et x_2 (ou racines du polynôme) seront calculées, si elles ne sont pas évidentes, par l'intermédiaire de Δ, également appelé *le discriminant* grâce à la relation :

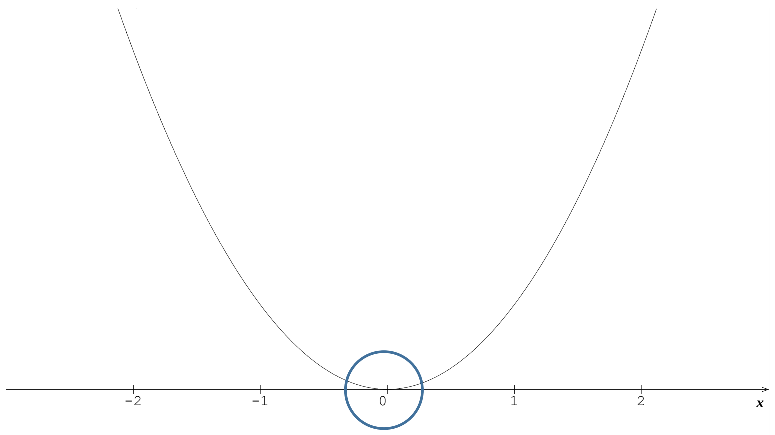
$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Avec a, b et c respectivement présents dans : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Le résultat obtenu de Δ est particulièrement intéressant à étudier (dans l'ensemble $\mathbb{R}$).

Retour Sommaire

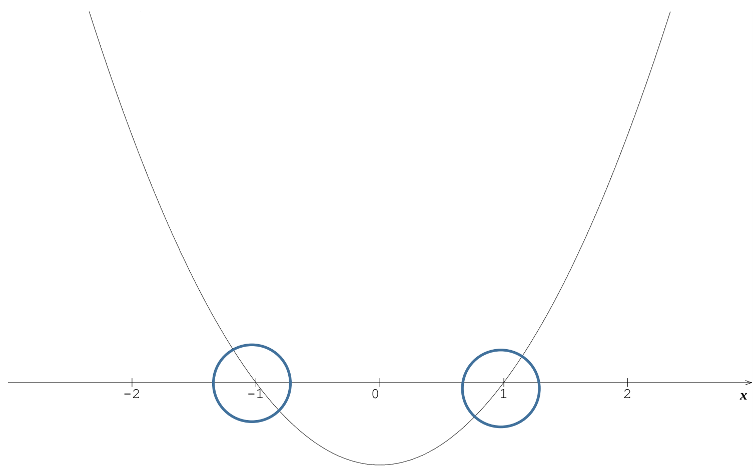
- Lorsque $\Delta = 0$



Une racine unique (pouvant être aussi appelée racine double).

La courbe représentative de *f* possède un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.

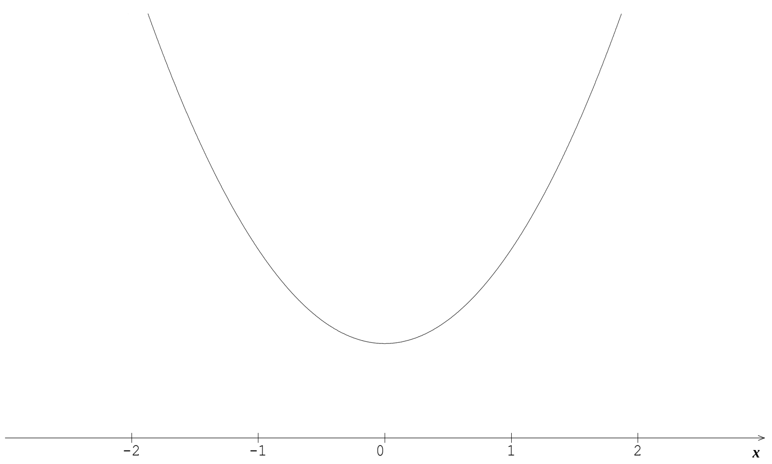
- Lorsque $\Delta > 0$



Deux racines.

La courbe représentative de *f* possède deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

- Lorsque $\Delta < 0$



Aucunes racines.

La courbe représentative de *f* ne possède pas de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Il est temps maintenant de calculer ses racines, si elles existent.

- Lorsque $\Delta = 0$

La racine sera déterminée de la façon suivante :

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

Ce qui n'est pas sans rappeler le calcul de l'abscisse du sommet de la parabole.

- Lorsque $\Delta > 0$

Les deux racines sont obtenues grâce aux relations :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Et

$$\boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Lorsque $\Delta < 0$

Pas de racines dans $\mathbb{R}$. (En revanche, il sera possible de déterminer des racines complexes confère chapitre complexe)

Exemple :

Soit le polynôme $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$

Identifions :

- $a = -2$
- $b = 2$
- $c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(-2)(4)$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$$

On déduit deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 * (-2)} = \frac{-2 - 6}{-4} = 2$$

Et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 * (-2)} = \frac{-2 + 6}{-4} = -1$$

Il est possible de présenter les racines ou solutions telles que :

$$S = \{-1;\ 2\}$$

III. Etude du signe du polynôme

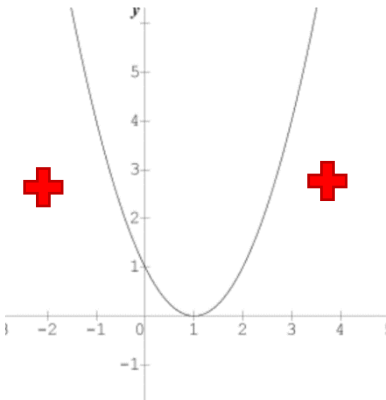
De même que l'étude de la croissance, l'étude du signe d'une fonction est absolument fondamentale. Dans le cas du polynôme du second degré, il nous sera possible d'utiliser les outils vus précédemment pour gagner du temps lors de notre étude.

Nous utiliserons le signe de a ainsi que la croissance du polynôme et les racines ou l'absence de racines de ce dernier.

Etudions les différents cas suivants :

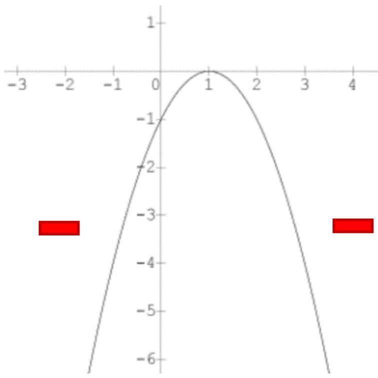
- $a > 0$ et $\Delta = 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



- $a < 0$ et $\Delta = 0$

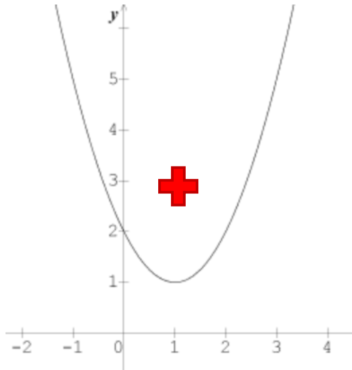
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Retour Sommaire

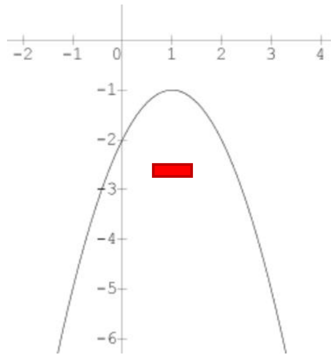
- $a > 0$ et $\Delta < 0$

x	$-\infty \quad +\infty$
$f(x)$	$+$



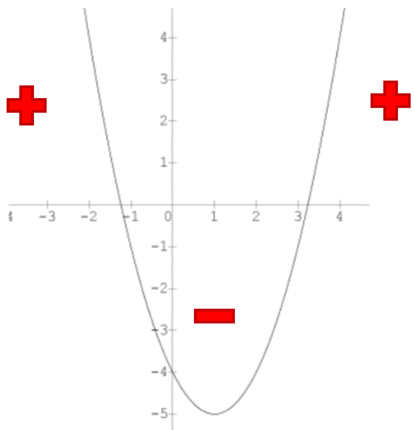
- $a < 0$ et $\Delta < 0$

x	$-\infty \quad +\infty$
$f(x)$	$-$



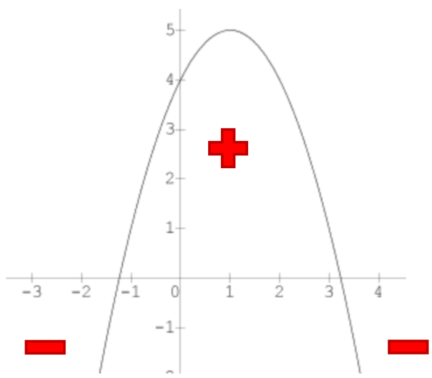
- $a > 0$ et $\Delta > 0$

x	$-\infty$		$x1$		α		$x2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	



- $a < 0$ et $\Delta > 0$

x	$-\infty$		$x1$		α		$x2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



IV. Les différentes formes du trinôme du second degré

Le trinôme du second degré ne sera pas toujours présenté sous la même forme, soyez capable de le reconnaitre, voici présentées différentes formes et leurs avantages :

- *La forme développée* :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Cette forme est la plus commune et ne donne qu'une quantité limitée d'information comme **le signe de a** et par conséquent **la croissance du polynôme.**

- *La forme canonique* :

$$\boxed{f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta}$$

Comme la forme précédente, la forme canonique permet de déterminer **la croissance du polynôme** mais permet également d'informer sur **les coordonnées du sommet** grâce à α et β.

- *La forme factorisée* :

$$\boxed{f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)}$$

Comme les formes précédentes, la forme factorisée permet de déterminer **la croissance du polynôme** mais permet également de donner directement **les valeurs des racines** du polynôme.

Rappelez-vous simplement que chacune de ces formes peut vous apporter des informations particulières comme la croissance grâce au signe de « a » ou bien les racines lisibles directement dans la forme factorisée, enfin les coordonnées du sommet de la parabole par le biais de « α et β » présent dans la forme canonique.

V. Fiche récapitulative

La forme développée :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La forme canonique :

$$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$$

La forme factorisée :

$$f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$$

Croissance du polynôme :

- $Si\ a > 0$, *décroissant puis croissant*
- $Si\ a < 0$, *croissant puis décroissant*

Détermination des coordonnées du sommet :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad et \qquad \beta = f(\alpha)$$

Détermination du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Détermination des racines :

- $Si\ \Delta = 0$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- $Si\ \Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $Si\ \Delta < 0$, pas de racines dans $\mathbb{R}$.