10 erreurs à ABSOLUMENT bannir et Comment les éviter

Table des matières

I. Avant-propos

Cette fiche pratique intervient dans un contexte récurent où je constate depuis une dizaine d'année d'enseignement qu'une vaste majorité d'étudiants commet les mêmes erreurs encore et encore.

Une observation évidente que j'ai pu remarquer, c'est que le nombre de point moyen perdu à cause de ces types d'erreurs était de 2 points pouvant aller jusqu'à 6 points sur une unique copie. On imagine aisément l'impact sur la moyenne à l'année.

Dans un apprentissage comme celui des mathématiques rien de plus normal que de faire des erreurs… Heureusement ces erreurs dont nous allons discuter ensemble peuvent être corrigées de la plus simple des manières.

Par ailleurs, ces erreurs peuvent très souvent dévier l'étudiant du chemin de résolution en l'emmenant sur une mauvaise conclusion alors que la méthodologie utilisée pouvait être correcte.

Dans cette fiche, je me propose donc de passer en revue et d'expliciter un certain nombre de points essentiels qui vous permettront de mieux évoluer au sein des mathématiques.

II. Priorité de calcul et Simplification

1. Priorité de calcul

Des notions à ne jamais négligées en mathématique sont les règles de priorité lors d'un calcul. Il n'est pas rare de se retrouver face à une expression en se posant la question « Est-ce que je dois commencer par la multiplication, la soustraction ou le carré ? ». Choisissez la mauvaise option et votre résultat n'aura plus aucun sens…

Faisons donc un petit rappel :

« Tout dépendra de la présence de parenthèse ou non »

En effet, il est facile de rappeler la liste des priorités mais que se passe-t-il lors de la présence de parenthèses ? Tout peut être remis en question. Tentons donc de passer ces priorités en revue à l'aide d'un exemple.

Exemple :

On désire simplifier l'expression suivante :

$$A = 3(4-1)^2 - 4 * 5 + 6$$

- Dans un premier temps notre attention doit se porter sur la parenthèse et tout ce qui se passe à l'intérieur. L'expression devient alors :

$$A = 3(3)^2 - 4 * 5 + 6$$

- Dans un second temps, on s'intéressera à tout ce qui est lié à cette parenthèse à savoir :

- La priorité sur le carré

$$A = 3 * 9 - 4 * 5 + 6$$

- Puis le(s) produit(s)

$$A = 27 - 20 + 6$$

- Nous nous occuperons enfin des sommes. Le résultat final sera :

$$A = 13$$

2. Simplification

Commençons avec un exemple qui pourrait paraitre évident au premier abord. Je remarque pourtant que cette évidence est constamment survolée. La conséquence est simple, si l'expression n'est pas **simplifiée au plus tôt**, la probabilité de faire une erreur augmente de manière importante.

Exemple :

Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = 4\left(2 + \frac{6}{2}\right) + 4 * \frac{6}{4}$$

Retour Sommaire

Il est naturel de vouloir se jeter frénétiquement dans les calculs lorsque l'on est convaincu de notre capacité à réussir ce dernier, c'est rassurant… Mais ne serait-il bénéfique de prendre un peu de recul avant de se lancer dans un calcul complexe alors que ce dernier est peut-être plus simple qu'il n'y parait ?

Imaginons donc la rédaction d'un étudiant lambda se laissant emporter par l'euphorie du moment.

Résolution à absolument éviter :

$$A(x) = 4\left(2 + \frac{6}{2}\right) + 4 * \frac{6}{4}$$

$$A(x) = 4\left(\frac{4}{2} + \frac{6}{2}\right) + \frac{24}{4}$$

$$A(x) = 4\left(\frac{10}{2}\right) + \frac{24}{4}$$

$$A(x) = \frac{40}{2} + \frac{24}{4}$$

$$A(x) = \frac{80}{4} + \frac{24}{4}$$

Retour Sommaire

$$A(x) = \frac{104}{4}$$

$$A(x) = 26$$

Même si le résultat obtenu est correct, ce qui a été manqué par l'étudiant sont les nombreuses simplifications évidentes qui auraient rendu les calculs infiniment plus simples.

N'oubliez pas que la proportion d'erreurs augmente avec le nombre de calculs et la difficulté de ces derniers sans parler du temps perdu dans le processus.

Tachons maintenant d'imaginer une rédaction plus appropriée.

Résolution adaptée :

On obtient donc, en moins de temps, évidement le même résultat avec cependant moins de ligne de calcul donc une probabilité d'échec inférieure.

$$A(x) = 4\left(2 + \frac{6}{2}\right) + 4 * \frac{6}{4}$$

$$A(x) = 4(2 + 3) + \cancel{4} * \frac{6}{\cancel{4}}$$

$$A(x) = 4(5) + 6$$

$$A(x) = 26$$

III. Isoler une inconnue

Savoir isoler une inconnue en mathématique est une nécessité absolue. Pour ce faire, il est important de bien manipuler vos termes lors de cette isolation. Puisque cette partie est essentielle nous allons la diviser en deux points :

- Le principe d'addition et de soustraction
- Le principe de multiplication et de division

Avant de continuer, assurez-vous de maitriser le point précédent sur les règles de priorité.

1. Principe d'addition et de soustraction

Prenons une équation simple dont on désire isoler l'inconnue x :

$$-2 + 3x = 5 + 4x$$

Observations : l'inconnue se trouve des deux côtés du signe égal.

- Il est nécessaire de rassembler tout ce qui peut l'être de chaque côté du signe égal si la résolution est directe (c'est le cas ici)
- Par convention les x sont présentés à gauche (or ce n'est pas une nécessité)
- Il nous faut donc déplacer la quantité -2 à droite et la quantité $4x$ à gauche

Important : Imaginez cette égalité comme une balance en équilibre, pour que cet équilibre se maintienne, il est nécessaire de toujours additionner ou de soustraire la même quantité à gauche comme à droite.

Résolution :

- Nous allons donc additionner de chaque côté la quantité 2 pour la faire disparaitre à gauche.

$$(2) - 2 + 3x = 5 + 4x + (2)$$
$$3x = 7 + 4x$$

La quantité -2 disparait à gauche pour apparaitre à droite. On appelle cela « passer de l'autre côté ». En passant le terme de l'autre côté, son signe change.

- De même pour la quantité $4x$ à droite.

$$-(4x) + 3x = 7 + 4x - (4x)$$

$$-x = 7$$

L'équation n'est pas encore résolue car il subsiste encore un « $-$ » devant le x. Dans ce cas, il sera possible de multiplier par -1 de chaque côté de l'égalité ou de tout simplement reproduire ce que nous avons pratiqué plus haut.

Le résultat sera donc :

$$x = -7$$

2. Principe de multiplication et de division

Soit l'équation suivante :

$$\frac{3}{5}x + 5 = \frac{5}{2}x - 3$$

Observations : l'inconnue x se trouve des deux côtés du signe égal.

- Il est nécessaire de rassembler tout ce qui peut l'être de chaque côté du signe égal si la résolution est directe (c'est encore le cas ici)

- Par convention les x sont présentés à gauche (or ce n'est pas une nécessité)
- Il nous faut donc déplacer la quantité 5 à droite et la quantité $\frac{5}{2}x$ à gauche

Résolution :

- Nous allons donc soustraire de chaque côté la quantité 5 pour la faire disparaitre.

$$-(5)+\frac{3}{5}x+5=\frac{5}{2}x-3-(5)$$

$$\frac{3}{5}x=\frac{5}{2}x-8$$

- De même pour la quantité $\frac{5}{2}x$

$$-\left(\frac{5}{2}x\right)+\frac{3}{5}x=\frac{5}{2}x-8-\left(\frac{5}{2}x\right)$$

$$-\frac{5}{2}x+\frac{3}{5}x=-8$$

$$-\frac{25}{10}x+\frac{6}{10}x=-8$$

$$-\frac{19}{10}x=-8$$

Jusqu'à là, nous avons reproduit le mode opératoire vu précédemment. À partir de maintenant, nous allons utiliser un outil supplémentaire. En effet, dans le cas où une fraction ou un coefficient simple se trouve devant x, la méthode la plus efficace, pour le simplifier, est souvent de multiplier par l'inverse cette quantité de chaque côté comme présenté ci-dessous :

$$\left(-\frac{10}{19}\right)*-\frac{19}{10}x=-8*\left(-\frac{10}{19}\right)$$

$$x=-8*\left(-\frac{10}{19}\right)=\frac{80}{19}$$

IV. Simplification de fraction

1. Fraction composée

Une erreur relativement récurrente lors de la manipulation de fraction est de vouloir absolument tout simplifier au dépend des règles les plus élémentaires.

Exemple :

Soit l'expression à simplifier :

$$\frac{2-3x}{2}$$

Sous cette forme, il nous est impossible de simplifier cette fraction. Pourtant, il n'est pas rare de voir les étudiants vouloir absolument simplifier le numérateur et le dénominateur par 2 tel que :

$$\frac{\cancel{2} - 3x}{\cancel{2}} \neq \frac{1 - 3x}{1} = 1 - 3x$$

Pour se convaincre de l'impossibilité de réaliser cette simplification, nous allons « casser » la fraction.

$$\frac{2 - 3x}{2} = \frac{2}{2} - \frac{3}{2}x$$

Seule la première partie est alors simplifiable par 2. La seconde partie reste la même.

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} - \frac{3}{2}x = 1 - \frac{3}{2}x$$

Notre résultat est donc bien différent du précédent.

2. Fraction « à étage »

Une complication des fractions est qu'il est possible de les empiler à l'infini. Sans aller jusqu'à cet extrême, il est nécessaire de savoir les manipuler lorsqu'elles commencent à attendre les 3 niveaux.

Exemple :

$$=\frac{2}{\frac{5}{3}}\quad (3\ niveaux) \qquad ou \qquad =\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\quad (4\ niveaux)$$

Pour simplifier ce genre de fraction, il est nécessaire d'identifier le trait médian, le trait de fraction qui se trouve au niveau du signe égal (en rouge ici).

- Dans le premier cas, il se trouve en dessous du 2
- Dans le second cas, il se trouve en dessous du premier 3

Une fois le trait médian identifié, nous allons couper la fraction en deux partie à savoir ; la partie supérieure et la partie inférieure.

Le résultat de la simplification sera le produit de la partie supérieure par l'inverse de la partie inférieure.

Premier exemple :

$$\frac{2}{\frac{5}{3}} = 2 * \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \qquad ou \qquad \frac{\frac{2}{1}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{1} * \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

Il est possible, mais pas nécessaire, d'ajouter un dénominateur 1 pour mieux visualiser le produit. *Second exemple :*

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{\cancel{3}} * \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{2}{5}$$

Comme il a été vu précédemment, tachez de toujours simplifier, dans la mesure du possible, avant de procéder au calcul.

V. Remplacement de valeur

Une vaste majorité des erreurs commises par les étudiants n'est que rarement due à leur compétence dans le domaine des mathématiques mais à leur inattention. L'exemple suivant devrait permettre d'éviter un certain nombre de ces erreurs.

Le cas qui va nous intéresser ici, est le remplacement d'une valeur littérale par une valeur chiffrée. Remplacer une variable x par une quantité quelconque, ou les coordonnées d'un vecteur par leurs valeurs…

La solution pour parer à ce genre d'erreur est extrêmement simple et rapide à mettre en place :

« Insérer une paire de parenthèse de chaque côté de la valeur que vous désirez remplacer »

Exemple :

Soit le polynôme du second degré suivant :

$$f(x) = -3x^2 + 4x - 3$$

On cherche à calculer $f(-3)$ donc remplacer la variable x par la quantité -3. Dans le but d'être compris de tous, nous allons ajouter une étape de calcul intermédiaire.

$$f(x) = -3(x)^2 + 4(x) - 3$$ (étape non nécessaire mais conseillée)

Puis on remplace :

$$f(-3) = -3(-3)^2 + 4(-3) - 3$$

Il suffit maintenant de respecter les priorités de calcul et de terminer ce dernier.

$$f(-3) = -27 - 12 - 3 = -42$$

Exemple :

Dans un autre contexte qui est celui des vecteurs. On cherche à déterminer les coordonnées du vecteur suivant :

Soit deux points $A\binom{3}{-1}$ et $B\binom{-2}{3}$.

Les coordonnées de vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont déterminées à l'aide de la relation suivante :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Dans notre cas, on obtiendra en remplaçant :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} (-2) - (3) \\ (3) - (-1) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

VI. Ne jamais négliger l'ensemble de définition

L'ensemble de définition est une notion qu'il est facile de laisse de côté car elle n'a que rarement une conséquence directe sur le calcul. En revanche ne pas comprendre son importance et son implication peut vous empêcher de mener à bien une étude de fonction.

Il sera possible lors d'une étude de fonction que l'ensemble de définition de la fonction ne soit pas donné. Ce sera donc à vous de le déterminer en fonction du contexte de l'exercice en prenant l'ensemble le plus étendu possible.

Exemple :

Soit le polynôme du second degré :

$$A(x) = 3x^2 + 4x - 2$$

Ce polynôme est défini sur $\mathbb{R}$, l'ensemble de définition est noté : $D_f = \mathbb{R}$

L'ensemble de définition permet également de :

- Déterminer les bornes d'un tableau lors de l'étude du signe ou de l'étude des variations d'une fonction.

Exemple :

x	0		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dans ce cas, l'ensemble de définition de la fonction étudiée est $D_f = [0;+\infty[= \mathbb{R}^+$

- Déterminer les valeurs interdites éventuelles d'une fonction (pour ne pas les oublier lors de la création des tableaux)

$$f(x) = \frac{1 - x}{x + 2}$$

Dans ce cas, l'ensemble de définition de la fonction étudiée est $D_f = \mathbb{R}/\{-2\}$

Important : Il vous sera nécessaire de bien rappeler l'ensemble de dérivation de la fonction avant de la dériver sous peine de faire des choses qui n'auraient aucun sens.

VII. Ne jamais négliger la relecture

Lors d'un examen, il est tout à fait naturel de vouloir grignoter sur son temps de relecture au profit de son temps de réflexion voire même ne pas ne faire aucune relecture.

Si cela peut sembler une bonne idée au départ, il vous sera pourtant plus facile de récupérer quelques points en corrigeant d'éventuelles étourderies que de tenter de réinventer les mathématiques sur des notions que vous ne maitriseriez pas.

Quelle relecture ?

Lancer sa relecture en fin de rédaction de votre copie peut rapidement se transformer en un procédé long et fastidieux qui pourrait mener à des corrections non nécessaires et à une accumulation de stress indésirable.

Il sera donc beaucoup plus intéressant de répartir se temps de relecture sur l'ensemble de la durée du devoir.

Comment organiser sa relecture ?

Il n'y évidement pas de recette miracle, en revanche appliquer ces quelques conseils pourrait changer radicalement votre note finale.

- Se relire à chaque fois que vous transcrirez une information de votre énoncé sur votre copie (probablement 20% d'erreur d'étourderie). Cette idée parait évidente et pourtant celle-ci est largement négligée. Ces erreurs sont d'autant plus dommageables qu'elles peuvent intervenir en début de votre raisonnement et donc fausser tous vos prochains calculs.

- Relire son énoncé après avoir terminé une question et vérifier ainsi que vous avez bel et bien répondu à la question. Après un long calcul ou une réflexion pénible, il n'est pas rare de vouloir rapidement passer à la suite, le problème est « Avez-vous vraiment répondu à la question de l'énoncé ? ». Soyez donc vigilant !

- Relire l'intégralité de l'exercice terminé afin de s'assurer de la cohérence de vos résultats dans le contexte de l'exercice. Rien de plus frustrant que de remarquer que notre résultat final, à deux minutes de rendre la copie, n'a absolument aucun sens.

Remerciements

Je tiens à remercier la communauté de mes étudiants dont les erreurs quotidiennes auront inspiré ce petit guide. Je remercie également toutes les personnes qui auront participé à l'élaboration et l'évolution du contenu des ressources eZsciences. Merci à tous…

Contacts

Désireux de faire évoluer les routines pélagiques, eZsciences est toujours en quête de perfectionnement et d'idées fraiches. N'hésitez donc pas à venir partager les vôtres :

yohan.ezsciences@gmail.com