Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 4 mai 2018

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Solution :** On cherche T_4.
On applique l'algorithme pour $n = 4$ à l'aide de la calculatrice on trouve
$T_4 \approx 463$ °C

2. **Solution :**
Initialisation : pour $n = 0$
$T_0 = 1\,000$ et $980 \times 0{,}82^0 + 20 = 1\,000$

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$ alors
$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0{,}82 T_n + 3{,}6 \\ &= 0{,}82 \times (980 \times 0{,}82^n + 20) + 3{,}6 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 980 \times 0{,}82^{n+1} + 16{,}4 + 3{,}6 \\ &= 980 \times 0{,}82^{n+1} + 20 \end{aligned}$$
La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$ or elle est vérifiée à ce rang 0 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$

3. **Solution :**
On cherche le plus petit entier naturel n tel que $T_n \leqslant 70$
On peut utiliser la calculatrice pour trouver $T_{14} \approx 80{,}9 > 70$ et $T_{15} \approx 69{,}9 < 70$ donc il faut attendre au minimum 15 heures avant de pouvoir ouvrir le four sans dommage.

On peut aussi résoudre l'inéquation :
$$T_n \leqslant 70 \iff 980 \times 0{,}82^n + 20 \leqslant 70 \iff 0{,}82^n \leqslant \frac{5}{98} \iff n\ln(0{,}82) \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right) \iff$$
$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{98}\right)}{\ln(0{,}82)} \text{ car } \ln(0{,}82) < 0 \text{ et on a } \frac{\ln\left(\frac{5}{98}\right)}{\ln(0{,}82)} \approx 14{,}99$$

Partie B

1. **Solution :** $f(0) = 1\,000 \iff a + b = 1\,000$
de plus $f'(0) + \frac{1}{5} f(0) = 4 \iff f'(0) = -196$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\frac{1}{5} a \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$ d'où $f'(0) = -196 \iff \frac{1}{5} a = 196$
On a donc $\begin{cases} a + b = 1\,000 \\ \frac{1}{5} a = 196 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 20 \\ a = 980 \end{cases}$
Finalement on a $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$

2.

$$f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

a. **Solution :** $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{t}{5}\right) = -\infty$, donc en posant $T = -\dfrac{t}{5}$, $\lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$ et par opération sur les limites on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$.

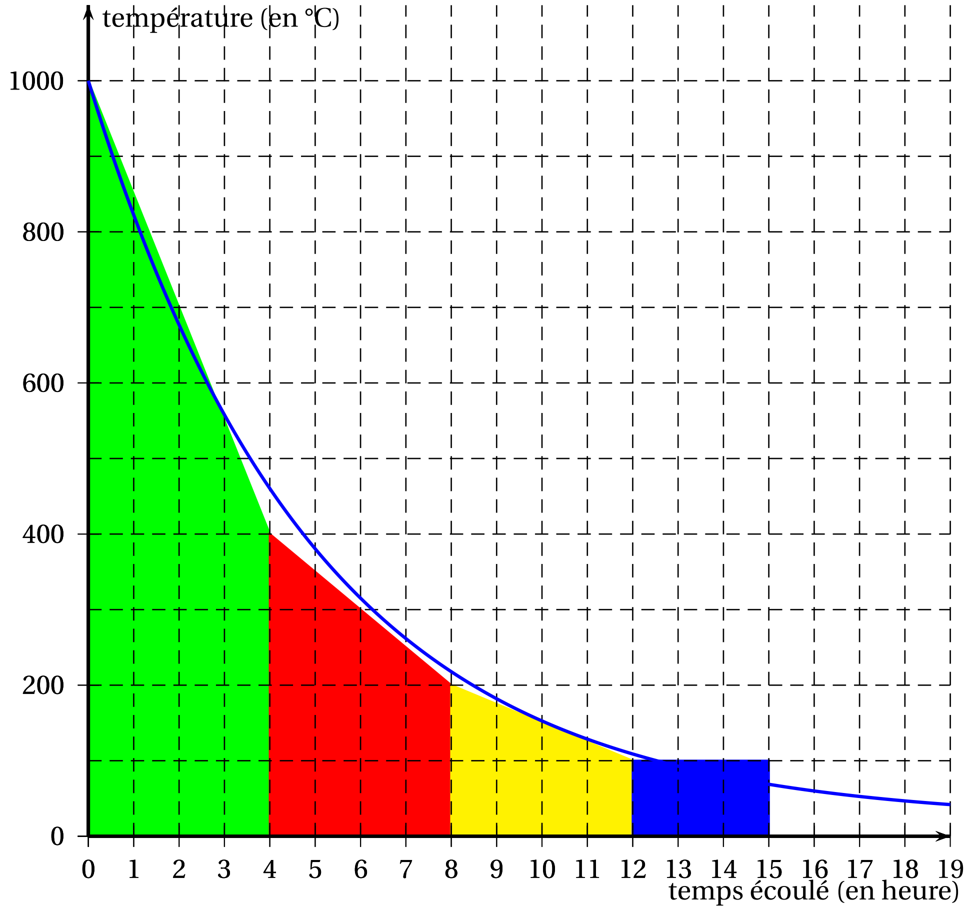
b. **Solution :**
D'après la question 1, $\forall t \in [0~;~+\infty[$, $f'(t) = -196\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$, d'où $f'(t) < 0$.
On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$1\,000$	20

c. **Solution :** On cherche à résoudre l'équation $f(t) = 70$
Sur $[0~;~+\infty[$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $]20~;~1\,000]$, or $70 \in]20~;~1\,000]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 70$ admet une unique solution α sur $[0~;~+\infty[$
Par dichotomie on trouve $\alpha \approx 14{,}9$ et comme f est strictement décroissante sur $[0~;~+\infty[$, on en déduit que $f(t) \leqslant 70 \iff t \geqslant \alpha$.
D'après ce modèle on peut donc ouvrir le four après environ 15 heures de refroidissement.
Remarque : on peut aussi résoudre l'inéquation :

$f(t) \leqslant 70 \iff 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20 \leqslant 70 \iff 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \leqslant 50 \iff \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} \leqslant \dfrac{5}{98} \iff$
$-\dfrac{t}{5} \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{98}\right)$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff$
$\dfrac{t}{5} \geqslant -\ln\left(\dfrac{5}{98}\right) \iff t \geqslant -5\ln\left(\dfrac{5}{98}\right) \approx 14{,}877$ soit en minutes au moins 893 min.

3. **a.**



Solution : Sur [0 ; 15] l'aire entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses peut-être approchée par les quatre trapèzes ci-dessus et on a alors

$\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 2\,800+1\,200+600+300 = 4\,900$ et donc la température moyenne est $\theta \approx \dfrac{4\,900}{15} \approx 327$ (° C).

Remarque : cette question laisse place à toute méthode d'approche de l'aire (par des rectangles, par des trapèzes...) et donc les résultats attendus peuvent être très divers. Ici le choix a été fait de trouver un minorant de l'aire par des rectangles

b. **Solution :**

$\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{15}\left(980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\right)\mathrm{d}t = \left[-4\,900\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20t\right]_0^{15} =$

$\left(-4\,900\mathrm{e}^{-3}+300\right)-(-4\,900) = 4\,900\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)+300$

d'où $\theta = \dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{980}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)+20 \approx 330{,}4$ (°C).

4. a. **Solution :**

$d(t) = f(t)-f(t+1) = \left(980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\right)-\left(980\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}}+20\right) = 980\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}}\right)$

On a donc bien $\forall t \in [0\,;\,+\infty[$, $d(t) = 980\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$

b. **Solution :** $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{t}{5}\right)=-\infty$ or $\lim\limits_{T\to-\infty}\mathrm{e}^{T}=0$ donc en posant $T=-\dfrac{t}{5}$ et par opération sur les limites on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty}d(t)=0$.
On peut donc en conclure que la température finira par se stabiliser et comme on a $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=20$, on en déduit que la température se stabilisera avec le temps à 20 ° C

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a=-4$, $b=2$ et $c=4$.

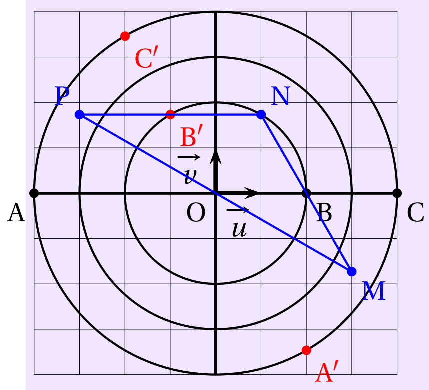
1. **a.** **Solution :** $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

$a'=a\mathrm{j}=-4\mathrm{j}=2-2\mathrm{i}\sqrt{3}=4\left(-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)=4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}=4\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}}=4\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$

$b'=b\mathrm{j}=2\mathrm{j}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

$c'=c\mathrm{j}=4\mathrm{j}=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}=4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

b. **Solution :**



$|a'|=4$ donc A′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\left(a'\right)=2$ et $Im\left(a'\right)<0$, on peut donc placer A′

$|b'|=2$ donc B′ est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et on a $Re\left(b'\right)=-1$ et $Im\left(b'\right)>0$, on peut donc placer B′

$|c'|=4$ donc C′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4 et on a $Re\left(c'\right)=-2$ et $Im\left(c'\right)>0$, on peut donc placer C′

2. **Solution :**
$a'=-c'$ donc A′ et C′ sont symétriques par rapport à O alors O, A′ et C′ sont alignés
$arg\left(b'\right)=arg\left(c'\right)=\dfrac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ sont colinéaires d'où O, B′ et C′ sont alignés.
Finalement O, A′, B′ et C′ sont alignés.

3. **Solution :**
$z_{\mathrm{M}}=\dfrac{a'+c}{2}=3-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{N}}=\dfrac{c'+c}{2}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{P}}=\dfrac{c'+a}{2}=-3+\mathrm{i}\sqrt{3}$
MNP semble isocèle en N d'après le dessin
MN=$|z_{\mathrm{N}}-z_{\mathrm{M}}|=\left|2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right|=4$ et PN=$|z_{\mathrm{N}}-z_{\mathrm{P}}|=|4|=4$
On a MN=NP donc MNP est bien isocèle en N

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. **Solution :**

$X_{\text{U}} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0{,}58\,;\,0{,}21^2\right)$ donc $P\left(X_{\text{U}} < 0{,}2\right) \approx 0{,}035$ et $P\left(0{,}5 \leqslant X_{\text{U}} < 0{,}8\right) \approx 0{,}501$

b. **Solution :** $P\left(X_{\text{U}} < 0{,}2\right) \approx 0{,}035$ signifie que la probabilité qu'un cristal se retrouve dans le récipient à fond étanche est de 0,035 environ; donc pour 1 800g de sucre on peut estimer que $1\,800 \times\ 0{,}035 = 63$ g se retrouvent dans le récipient à fond étanche.

$P\left(0{,}5 \leqslant X_{\text{U}} < 0{,}8\right) \approx 0{,}501$ signifie que la probabilité qu'un cristal se retrouve dans le tamis 2 est de 0,501 environ.

Donc pour 1 800 g de sucre on peut estimer que $1\,800 \times 0{,}501 \ = \ 901{,}8$ g se retrouvent dans le tamis 2.

2. **Solution :** On sait que si $X_{\text{V}} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0{,}65\,;\,\sigma_{\text{V}}^2\right)$ alors $Z = \dfrac{X_{\text{V}} - 0{,}65}{\sigma_{\text{V}}} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0\,;\,1^2\right)$

On a ici $P\left(0{,}5 \leqslant X_{\text{V}} < 0{,}8\right) = 0{,}4$

$0{,}5 \leqslant X_{\text{V}} < 0{,}8 \iff -\dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}} \leqslant Z < \dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}}$

on a donc $P\left(-\dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}} \leqslant Z < \dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}}\right) = 0{,}4$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0\,;\,1^2\right)$.

À l'aide de la calculatrice on trouve $\dfrac{0{,}15}{\sigma_{\text{V}}} \approx 0{,}524$ d'où $\sigma_{\text{V}} \approx 0{,}286$.

Partie B

On cherche $P(E)$.
U et V forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales on a

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap U) + P(E \cap V) \\ &= P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E) \\ &= 0{,}009 + 0{,}035 = 0{,}044 \end{aligned}$$

1. a. **Solution :** L'énoncé donne $P_U(E) = 0{,}03$, $P_V(E) = 0{,}05$, $P(U) = 0{,}3$ et $P(V) = 0{,}7$

b. **Solution :** On cherche $P_E(U)$

$P_E(U) = \dfrac{P(E \cap U)}{P(E)} = \dfrac{0{,}009}{0{,}044} = \dfrac{9}{44} \approx 0{,}205$

2. **Solution :** on veut $P_E(U) = 0,3$

$$P_E(U) = \frac{P(E\cap U)}{P(E)} = 0,3 \iff \frac{P(U)\times P_U(E)}{P(U)\times P_U(E)+P(V)\times P_V(E)} = 0,3$$
$$\iff \frac{0,03P(U)}{0,03P(U)+0,05P(V)} = 0,3$$
$$\iff 0,03P(U) = 0,009P(U)+0,015P(V)$$
$$\iff 0,021P(U) = 0,015P(V)$$
$$\iff P(U) = \frac{5}{7}P(V)$$

or $P(V) = 1-P(U)$ donc on a $P(U) = \frac{5}{7}(1-P(U)) \iff \frac{12}{7}P(U) = \frac{5}{7} \iff$

$P(U) = \frac{5}{12} \approx 0,417$

Si l'entreprise veut atteindre son objectif, elle doit donc acheter environ 41,7% de son sucre à l'exploitation U et 58,3% à V

Partie C

1. **Solution :** Ici on répète $n = 150$ fois de manière indépendante le prélèvement d'un paquet

La proportion annoncée de paquets provenant de l'exploitation U est $p = 0,3$.

On a $n \geqslant 30$, $np = 45 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 105 \geqslant 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique.

On peut affirmer au seuil de 95% que la fréquence observée de paquets de sucre provenant de l'exploitation U devrait appartenir à l'intervalle

$I_n = \left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

$p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,227$ et $p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,373$

La fréquence observée est $f = \frac{30}{150} = 0,2 \notin I_n$.

On peut donc rejeter l'affirmation au seuil de 95%.

2. **Solution :** l'échantillon est de taille $n = 150$, la fréquence observée de paquets provenant de l'exploitation U est $f = 0,42$

On a $n \geqslant 30$, $nf = 63 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 87 \geqslant 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de confiance.

On peut affirmer avec une confiance à 95 % que la proportion p de paquets de sucre provenant de l'exploitation U devrait appartenir à l'intervalle

$I = \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. $f-\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,3384$ et $f+\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,5016$

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 % est donc environ

$I = [0,338 ; 0,502]$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Solution : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par C(0 ; 3 ; 2)

on obtient une représentation paramétrique de (CD) : $\begin{cases}x=t\\y=3\\z=2-t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Solution : B(4 ; −1 ; 0). Soit t le paramètre associé à M alors M(t ; 3 ; $2-t$).
Alors $\text{BM}^2=(t-4)^2+(4)^2+(2-t)^2=2t^2-12t+36=2(t^2-6t+18)$.
BM est minimale quand BM^2 l'est c'est-à-dire quand $t^2-6t+18$ est minimal.
On sait que tout polynôme de la forme at^2+bt+c avec $a>0$ admet un minimum en $t=-\dfrac{b}{2a}$
ici BM sera donc minimale pour $t=3$ soit pour M(3 ; 3 ; −1).

b. **Solution :** $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. **Solution :** D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.
On a alors $\mathscr{A}_{\text{BCD}}=\dfrac{1}{2}\times\text{CD}\times\text{BH}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{32}\times\sqrt{18}=\sqrt{144}=12$ (en u. a.).
L'aire de BCD est donc bien de 12 cm^2.

3. **a.** **Solution :**
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont évidement pas colinéaires donc B, C et D définissent bien un plan.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-8+4+4=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CD}=8+0-8=0$.
$\overrightarrow{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. **Solution :**
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc (BCD) : $2x+y+2z+d=0$.
C(0 ; 3 ; 2) appartient à (BCD) donc $2x_C+y_C+2z_C+d=0$ ce qui donne $d=-7$.

Finalement (BCD) : $2x+y+2z-7=0$.

c. **Solution :** Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur, on a alors

$$\Delta : \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=4+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

d. **Solution :** I est un point de (BCD) donc $2x_{\mathrm{I}}+y_{\mathrm{I}}+2z_{\mathrm{I}}-7=0$

De plus $\mathrm{I} \in \Delta$ donc il existe un réel t tel que

$2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \iff 9t=-6 \iff t=-\dfrac{2}{3}$.

On en déduit $\mathrm{I}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$.

Remarque : on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD).

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD.

$\mathrm{AI}=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=2$.

$\mathcal{V}_{\mathrm{ABCD}}=\dfrac{1}{3}\times AI\times\mathcal{A}_{\mathrm{BCD}}=8$ (en cm^3).

Le volume du tétraèdre est 8 cm^3.

Exercice 4 **5points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Cryptage

1. **Solution :**
Dans l'alphabet la lettre « N » est associée à $x = 13$ alors $x(x+B) = 13\times 26 = 338 = 33\times 10+8 \equiv 8\,[33]$
Bob code la lettre « N » avec le nombre $y = 8$.

2. **Solution :**
Dans l'alphabet la lettre « O » est associée à $x = 14$ alors $x(x+B) = 14\times 27 = 378 = 33\times 11+15 \equiv 15[33]$
Bob code la lettre « O » avec le nombre $y = 15$.

Partie B : Décryptage

1. **Solution :** Soit x un entier tel que $x(x+13) \equiv 3 \quad [33] \iff x^2+13x \equiv 3\ [33]$.
$$\iff x^2+13x+33x \equiv 3\ [33] \quad \text{car} \quad 33x \equiv 0\ [33]$$
$$\iff x^2+46x+529 \equiv 3+1\ [33] \quad \text{car} \quad 529 = 16\times 33+1 \equiv 1\ [33]$$
$$\iff (x+23)^2 \equiv 4\ [33].$$

2. **a. Solution :**
Soit x un entier tel que $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors il existe un entier k tel que $(x+23)^2 = 33k+4$.
Alors $(x+23)^2 = 33k+4 = 3\times 11k+4 \equiv 4\ [3]$
$(x+23)^2 = 33k+4 = 11\times 3k+4 \equiv 4\ [11]$
finalement si $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$ alors le système d'équations
$\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\(x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ est vérifié.

b. Solution : si $(x+23)^2 \equiv 4\ [11]$ et $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$, alors il existe un entier k' tel que $(x+23)^2 = 11k'+4$
Or $(x+23)^2 \equiv 4\ [3]$. On a alors $11k'+4 \equiv 4\ [3]$ ou encore $11k' \equiv 0\ [3]$
donc 3 divise $11k'$ or 3 et 11 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 3 divise k'.
Il existe donc un entier r tel que $k' = 3r$
alors $(x+23)^2 = 11k'+4 = 33r+4 \equiv 4\ [33]$, d'où $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$
Finalement si $\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 4\ [3]\\(x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ alors $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$.

Remarque :
Plus rapide : 3 et 11 divisent $(x+23)^2-4$. Or 3 et 11 sont premiers entre eux donc leur produit $3\times 11 = 33$ divise $(x+23)^2-4$, d'où $(x+23)^2 \equiv 4\ [33]$.

c. **Solution :** $(x+23)^2 \equiv 4\ [3] \iff (x+23)^2 \equiv 1\ [3]$ car $4 \equiv 1\ [3]$.

Dans la question **a.** on a montré que $x(x+13) \equiv 3\ [33] \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$$

Dans la question **b.** on a montré ainsi que

$$\left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$x(x+13) \equiv 3\ [33]$

On a donc bien $x(x+13) \equiv 3\ [33] \iff \left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$

3. **a.** **Solution :**

a	0	1	2
a^2	0	1	4
modulo 3, a^2 est congru à	0	1	1

Les entiers naturels a tels que $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1\ [3]$ sont 1 et 2.

b. **Solution :**

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
modulo 11, b^2 est congru à	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Les entiers naturels b tels que $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4\ [11]$ sont 2 et 9.

4. **a.** **Solution :**

On sait que $x(x+13) \equiv 3\quad [33] \iff \left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$

D'après ce qui précède on a

$$(x+23)^2 \equiv 1\ [3] \iff \left\{\begin{array}{l}x+23 \equiv 1\ [3]\\ \text{ou}\\ x+23 \equiv 2\ [3]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x \equiv -22\ [3]\\ \text{ou}\\ x \equiv -21\ [3]\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l}x \equiv 2\ [3]\\ \text{ou}\\ x \equiv 0\ [3]\end{array}\right.$$

$$(x+23)^2 \equiv 4\quad [11] \iff \left\{\begin{array}{l}x+23 \equiv 2\ [11]\\ \text{ou}\\ x+23 \equiv 9\ [11]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x \equiv -21\ [11]\\ \text{ou}\\ x \equiv -14\ [11]\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l}x \equiv 1\quad [11]\\ \text{ou}\\ x \equiv 8\ [11]\end{array}\right.$$

$x(x+13) \equiv 3\quad [33] \iff \left\{\begin{array}{lcl}(x+23)^2 & \equiv & 1\ [3]\\ (x+23)^2 & \equiv & 4\ [11]\end{array}\right.$ est donc équivalent aux quatre systèmes donnés

b. **Solution :** Avec x entier et $0 \leqslant x < 33$ $\left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv & 2\ [3] \\ x & \equiv & 8\ [11] \end{array}\right. \iff x = 8.$

$\left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv & 0\ [3] \\ x & \equiv & 1\ [11] \end{array}\right. \iff x = 12$

$\left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv & 2\ [3] \\ x & \equiv & 1\ [11] \end{array}\right. \iff x = 23$, $\left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv & 0\ [3] \\ x & \equiv & 8\ [11] \end{array}\right. \iff x = 30.$

5. **Solution :**

```
Pour x allant de 0 à 32
  Si le reste de la division de x(x+13) par 33 est égal à 3 alors
    Afficher x
  Fin Si
Fin Pour
```

6. **Solution :** La première lettre du message de Bob a été codée par 3, d'après ce qui précède cela signifie que cette première lettre peut être I, M, X.

Il est donc impossible pour Alice d'utiliser le « chiffre de RABIN » pour décoder un message lettre par lettre.