Trigonométrie
Et outils
Pour la trigonométrie

Table des matières

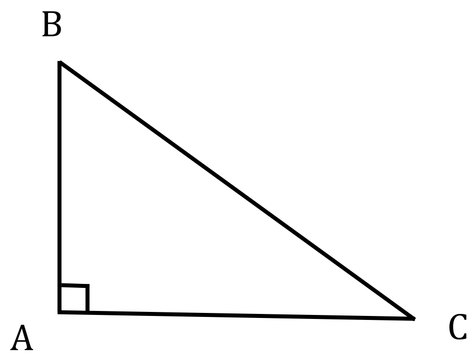
La trigonométrie est toujours assez redoutée des étudiants à tort car c'est un outil formidable en géométrie et pas seulement. Les fonctions trigonométriques trouvent, en effet une application directe dans tous les phénomènes physiques qui nous entourent (le son, la lumière, le mouvement…).

I. Rappel et triangle rectangle

Dans un premier temps, considérons-la comme l'outil qui nous permet de retrouver, entre autres, la valeur d'un angle. Nous nous attardons pour le moment à son utilisation au sein des *triangles rectangles*. Car oui, son application est vaste.

« Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrées des deux autres côtés » **Pythagore**

Cette relation se présente donc sous cette forme :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$[BC]$: Représente l'hypoténuse (le plus long segment du triangle).

$[AC]$ et $[AB]$: Représentent quant à eux les deux autres côtés.

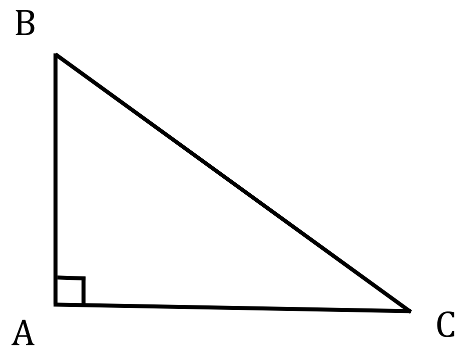
Cette relation est fondamentale car bon nombre de formules complexes en apparence découlent de cette dernière expression.

Malheureusement, ce théorème reste limité dans l'application. En effet, il ne nous permet pas de déterminer la valeur des angles de notre triangle (sauf l'angle droit grâce à sa réciproque) ou d'un autre côté si l'information venait à manquer.

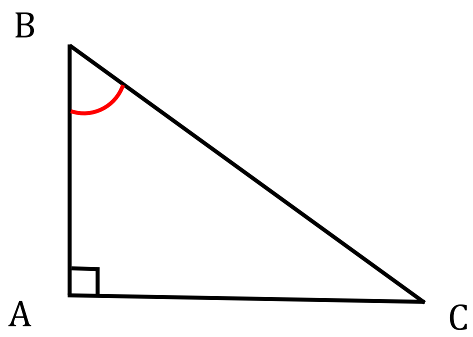
Il serait donc intéressant de s'approprier de nouveaux outils pour approfondir notre connaissance du triangle rectangle.

II. Calcul d'un angle dans le triangle rectangle

Reprenons notre triangle précédent :



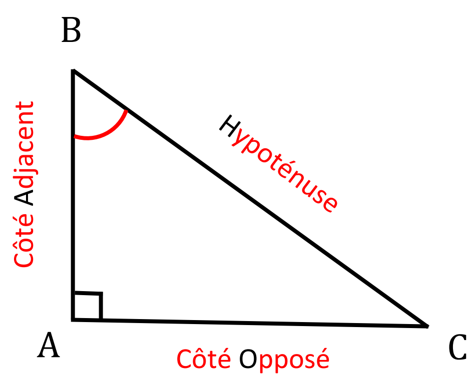
Connaissant la valeur de chacun de ses côtés, nous désirons connaître la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$. (par définition $\widehat{BAC} = 90°$, car rectangle en A)



Pour le déterminer, il nous faut introduire deux nouveaux termes pour définir chacun des côtés du triangle.

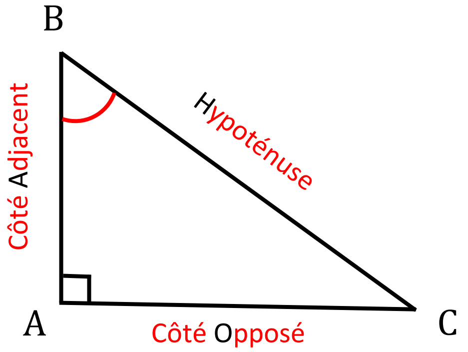
- Nous connaissons déjà : l'***hypoténuse*** (elle reste la même quelle que soit la situation)
- Nous avons besoin maintenant : du ***côté adjacent*** (un des côtés formant l'angle étudié qui n'est pas l'hypoténuse)
- Et du ***côté opposé*** (le segment restant qui ne construit pas l'angle étudié)

Dans notre cas, le triangle devient :



Les trois nouvelles fonctions introduites sont appelées fonctions trigonométriques où « cos » correspond à **cosinus**, « sin » à **sinus** et « tan » à **tangente**. Ces trois fonctions peuvent se retrouver facilement sur la calculatrice.

Chacun des côtés étant identifiés, nous pouvons passer à la phase de calcul. L'angle $\widehat{ABC}$ pourra être calculé de trois manières différentes :



$$\cos\widehat{ABC} = \frac{Côté\ Adjacent}{Hypoténuse} \quad ou\ dans\ notre\ cas \quad \cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{Côté\ Opposé}{Hypoténuse} \quad ou\ dans\ notre\ cas \quad \sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{Côté\ Opposé}{Côté\ adjacent} \quad dans\ notre\ cas \quad \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

Un moyen mnémotechnique répandu est d'utiliser l'expression « CAH SOH TOA» pour :

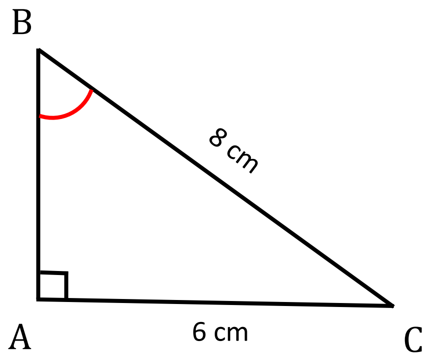
« Cosinus = Adjacent/Hypoténuse, Sinus = Opposé/Hypoténuse et Tangente = Opposé/Adjacent ».

⚠ Lors de la manipulation de fonctions trigonométriques à l'aide de la calculatrice, il est impératif de faire correspondre l'unité de l'angle étudié à celle utilisée par la calculatrice. Si vos angles sont proposés en **degré** ajustez votre calculatrice en degré (°), si vos angles sont proposés en **radian** ajustez votre calculatrice en radian (angle souvent composé à partir du nombre π).

Une fois le rapport posé, il sera nécessaire d'utiliser la fonction « arc [cos/sin/tan] » ou « $[\cos/\sin/\tan]^{-1}$ » de votre calculatrice.

Exemple :

Dans cet exemple nous chercherons à déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ en degré (°) :



Afin d'être en mesure de déterminer la fonction trigonométrique adaptée, il est nécessaire d'ordonner les informations liées à l'énoncé.

- On connait la longueur de l'**hypoténuse** BC soit 8 cm
- On connait la longueur du **côté opposé** AC soit 6 cm
- On ne connait pas la longueur du côté adjacent AB.

On déduit que la seule fonction trigonométrique exploitable sera la fonction **sinus** (SOH).

On pose donc :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{Côté\ Opposé}{Hypoténuse} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

On cherche maintenant à extraire la valeur de l'angle de la fonction sinus. Cette valeur est attendue en degré (°). Assurons-nous que la calculatrice est bien ajustée en degré. Il reste à utiliser la fonction trigonométrique inverse de la calculatrice. Soit :

$$\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \approx 49°$$

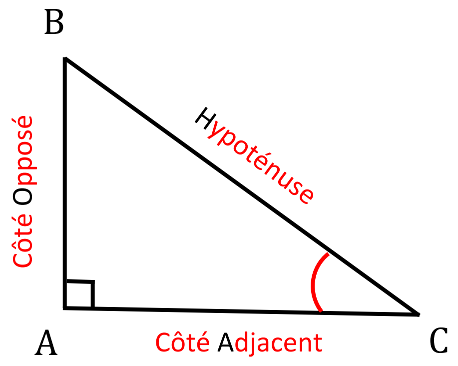
Ou

$$sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 49°$$

La valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ est d'environ 49° ou 0,85 (rad).

Retour Sommaire

Dans le cas où nous voudrions nous intéresser à l'angle $\widehat{ACB}$. Notre triangle deviendrait :



Les formules vues précédemment s'adapteront donc en conséquence :

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{Côté\ Adjacent}{Hypoténuse} \quad ou\ dans\ notre\ cas \quad \cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin\widehat{ACB} = \frac{Côté\ Opposé}{Hypoténuse} \quad ou\ dans\ notre\ cas \quad \sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\widehat{ACB} = \frac{Côté\ Opposé}{Côté\ adjacent} \quad dans\ notre\ cas \quad \tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$$

Retour Sommaire

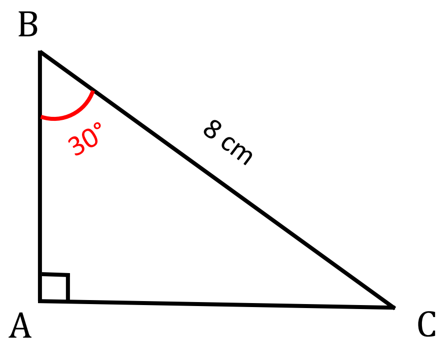
III. Calcul de la longueur d'un côté dans le triangle rectangle

Les formules vues précédemment ont donc un intérêt certain dans la détermination de la mesure des angles au sein du triangle rectangle. Il est de plus possible dans un contexte où un angle est connu de pouvoir déterminer cette fois la longueur d'un segment du triangle.

Reprenons l'exemple vu plus haut :

Exemple :

Déterminer la longueur du segment AB



On ordonne les informations liées à l'énoncé :

- On connait la longueur de l'**hypoténuse** BC soit 8 cm
- On connait la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ soit 30°
- On ne connait pas la longueur du côté opposé AC
- On recherche la longueur du **côté adjacent** AB.

On déduit que la seule fonction trigonométrique exploitable sera la fonction **cosinus** (CAH).

On pose donc :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{Côté\ Adjacent}{Hypoténuse} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos 30° = \frac{AB}{8}$$

On cherche alors à isoler AB :

$$AB = 8 \times \cos 30° = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$$

La longueur du segment AB est d'environ 6,9 cm.

IV. Le cercle trigonométrique

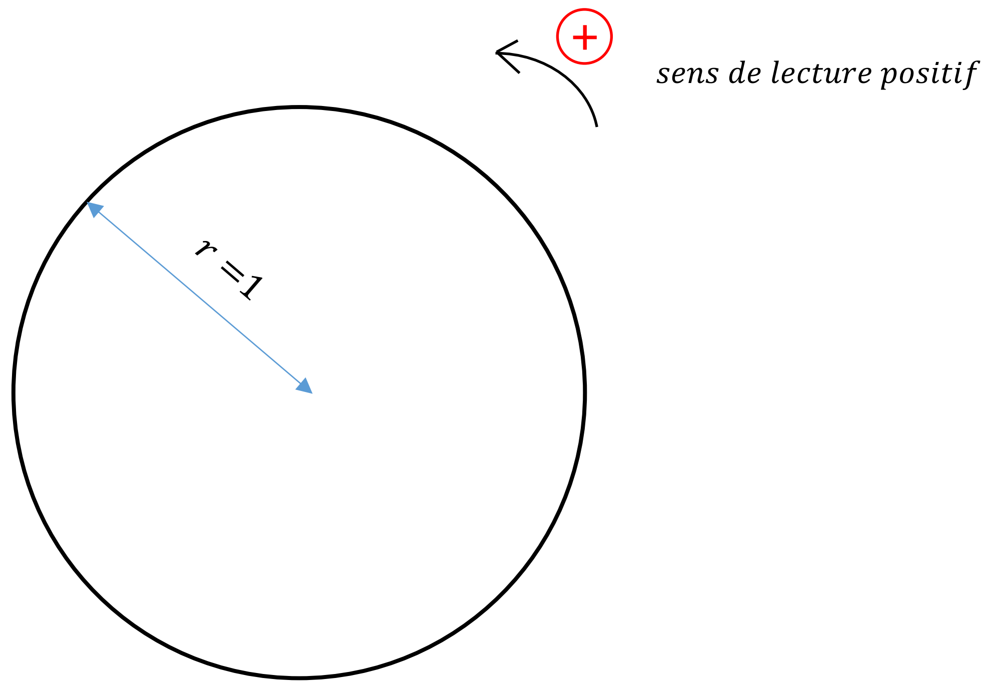
Une fois l'étude du triangle rectangle maitrisée, les fonctions trigonométriques trouveront d'autres applications dans de nombreux domaines. Il est donc important de mieux connaitre ces fonctions-là.

Afin de bien maitriser ces fonctions, un outil reste indispensable : le cercle trigonométrique.

A. Propriété du cercle trigonométrique

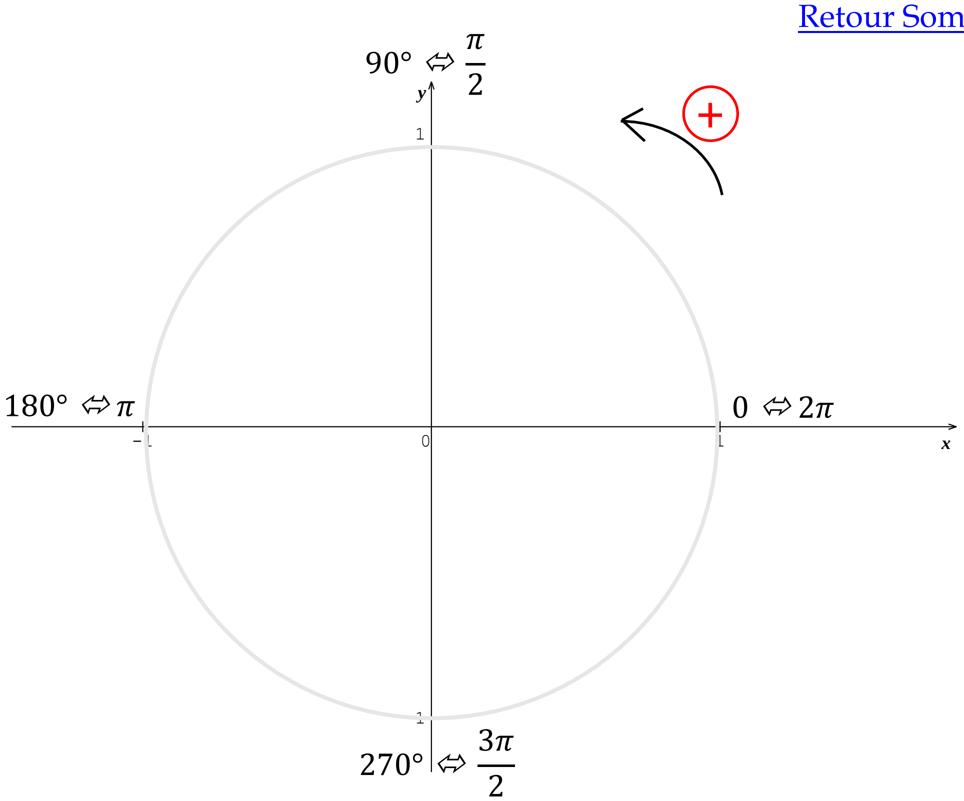
Le cercle trigonométrique est un cercle quelque peu particulier possédant les propriétés suivantes :

- Le **rayon** du cercle est **égal à 1**
- Le cercle est **orienté** « + » dans le sens antihoraire et « - » dans le sens horaire.



Il sera donc possible d'effectuer du repérage de point dans ce cercle à l'aide d'un unique paramètre ; l'angle θ.

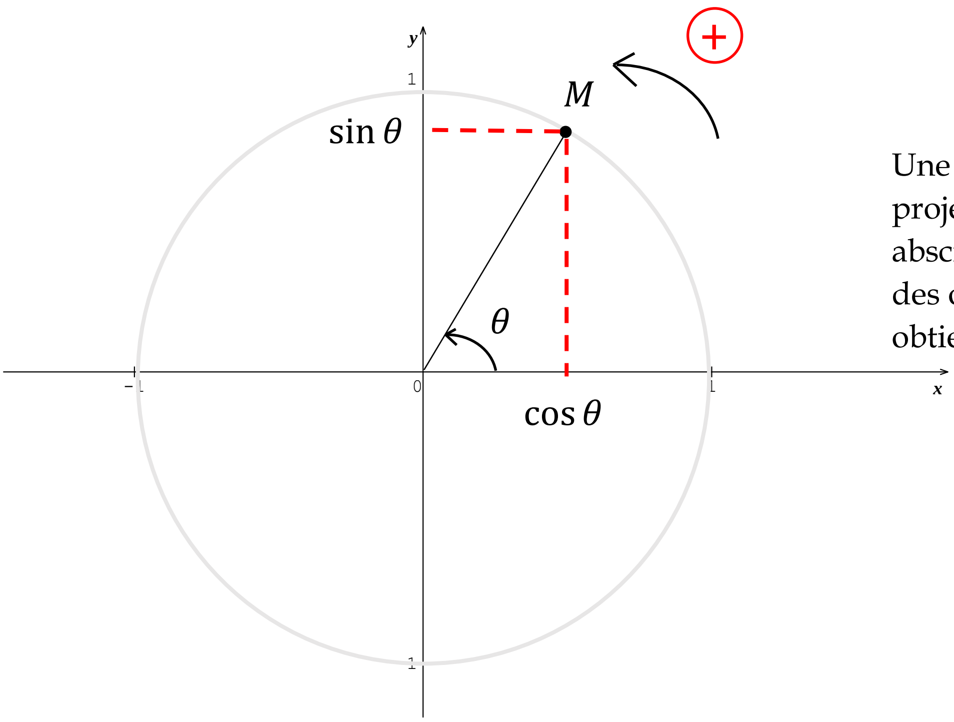
L'utilisation des fonctions trigonométriques (cos, sin, tan) interviennent lors de la conversion des coordonnées dans un repère circulaire aux coordonnées cartésiennes. A partir maintenant, un repère cartésien sera associé à notre cercle trigonométrique.



Il est également possible de lire ce cercle dans le sens opposé en utilisant la convention « $-$ ».

B. Repérage dans le cercle trigonométrique

On place un point M sur notre cercle trigonométrique :



Une fois le point M projeté sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées on obtient :

$$x_M = \cos\theta$$

et

$$y_M = \sin\theta$$

Retour Sommaire

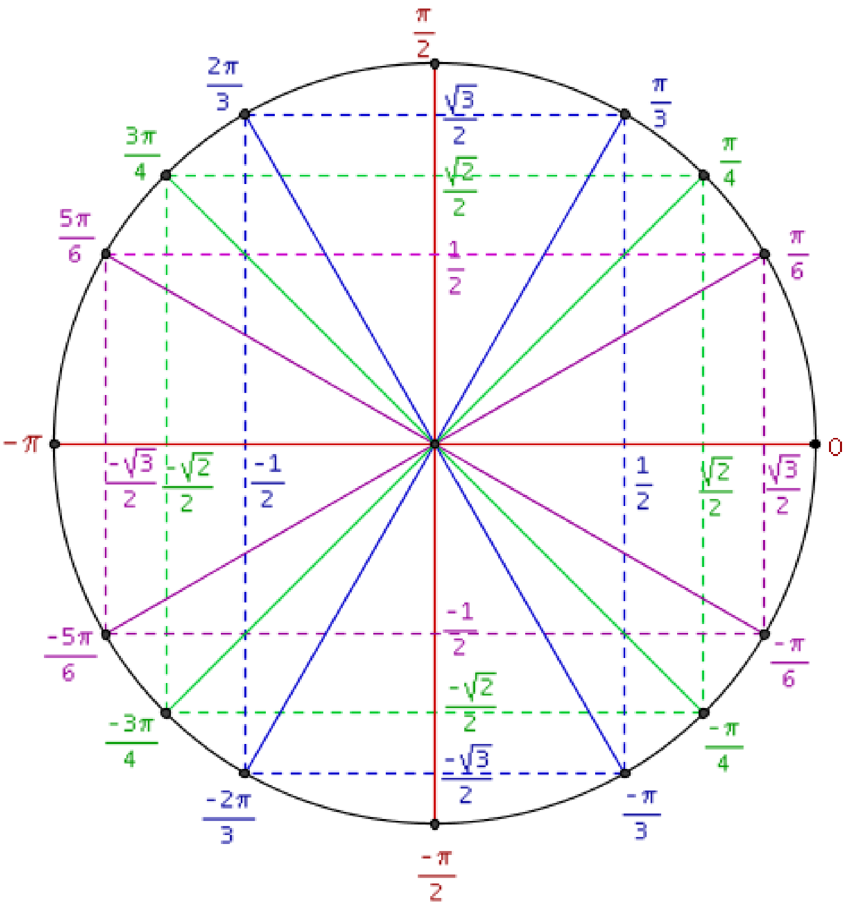
C. Valeurs d'angles particulières

Lors de la manipulation de fonctions trigonométriques, il sera intéressant, dans le but de faciliter les calculs, de connaitre un certain nombre de valeurs particulières présentées dans le tableau ci-dessous. Ces valeurs sont exprimées ici en radian.

θ	0	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Le tableau se lit simplement, par exemple : $\cos(\pi) = -1$

Plus intéressant encore, être en mesure de placer ces valeurs sur le cercle :



D. Angle et simplification

Il est important de noter que la valeur issue d'un **cos** ou d'un **sin** appartient à l'ensemble $[-1\,;1]$ telle que :

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

et

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

De plus, il sera possible de simplifier certaines expressions grâce aux propriétés du cercle trigonométrique et des règles de symétrie. Retrouvez quelques exemples ci-dessous :

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos a$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = -\sin a$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$$

V. Déterminer la mesure principale d'un angle

La mesure principale d'un angle est une mesure d'angle appartenant à l'ensemble $]-\pi;\pi]$. Cette forme permet de rapidement placer un point sur le cercle trigonométrique sans avoir à enchainer un certain nombre les tours.

Une mesure d'angle est toujours à $2k\pi$ près ou *modulo* 2π, avec k correspondant donc à un nombre de tours. Il sera relativement aisé de transformer une mesure d'angle quelconque en une mesure principale à l'aide de la méthode suivante :

On cherche à transformer une mesure d'angle quelconque θ afin qu'elle appartienne à l'ensemble $]-\pi;\pi]$ (soit « retirer » ou « ajouter des tours » à la mesure étudiée)

$$\theta \pm 2k\pi$$

Exemple :

Soit une mesure d'angle quelconque :

$$\theta = \frac{17\pi}{3}$$

On remarque que le coefficient 17 du numérateur est supérieur au coefficient 3 du dénominateur, un signe que notre mesure d'angle n'est pas une mesure principale.

Dans ce cas $\theta > 0$, il est donc tout naturel de vouloir « retirer des tours ». On pose :

$$\frac{17\pi}{3} - 2k\pi = \frac{17\pi}{3} - \frac{6k\pi}{3}$$

On détermine alors une valeur de k telle que : $-3 \leq 17 - 6k \leq 3$

Ici $k = 3$. L'expression devient :

$$\frac{17\pi}{3} - \frac{6(3)\pi}{3} = \frac{17\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

La mesure principale de l'angle θ est :

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

Reprenons cette méthode pour l'appliquer à un angle différent :

Soit une mesure d'angle quelconque :

$$\theta = -\frac{39\pi}{4}$$

Dans ce cas $\theta < 0$, il est donc tout naturel de vouloir « ajouter des tours ». On pose :

$$-\frac{39\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{39\pi}{4} + \frac{8k\pi}{4}$$

On détermine alors une valeur de k telle que : $-4 \leq -39 + 8k \leq 4$

Ici $k = 5$. L'expression devient :

$$-\frac{39\pi}{4} + \frac{8(5)\pi}{4} = -\frac{39\pi}{4} + \frac{40\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

La mesure principale de l'angle θ est :

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

VI. Conversion degré/radian

Le degré et le radian sont deux unités d'angle. Il est possible de convertir facilement de l'une vers l'autre en rappelant quelques équivalences :

Un tour de cercle correspond à : $360° \Leftrightarrow 2\pi$

A partir cette équivalence il suffit de poser :

$$angle\ (°) \times 2\pi = angle\ (rad) \times 360$$

Exemple :

On souhaite convertir les angles suivants : $\frac{3}{2}\pi,\ 90°,\ \frac{5}{6}\pi\ \ et\ \ 10°$

Ici les angles présentés en degré sont : $90°$ et $10°$

Les angles présentés en radian sont : $\frac{3}{2}\pi$ et $\frac{5}{6}\pi$

Utilisons notre relation de conversion : $angle\ (°) \times 2\pi = angle\ (rad) \times 360$

Pour un angle de 90° :

$$90 \times 2\pi = angle\ (rad) \times 360$$

$$angle\ (rad) = \frac{90 \times 2\pi}{360} = \frac{\pi}{2}$$

Pour un angle de 10° :

$$10 \times 2\pi = angle\ (rad) \times 360$$

$$angle\ (rad) = \frac{10 \times 2\pi}{360} = \frac{1}{18}\pi$$

Pour un angle de $\frac{3}{2}\pi$:

$$angle\ (°) \times 2\pi = \frac{3}{2}\pi \times 360$$

$$angle\ (°) = \frac{\frac{3}{2}\pi \times 360}{2\pi} = \frac{3\pi \times 360}{4\pi} = 270°$$

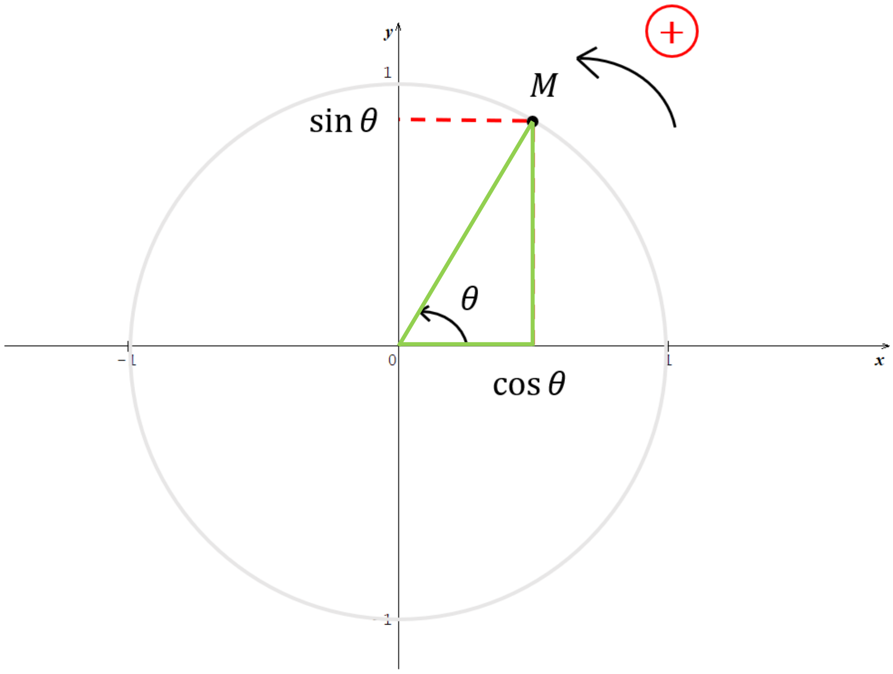
Pour un angle de $\frac{5}{6}\,\pi$:

$$angle\ (°) \times 2\pi = \frac{5}{6}\ \pi \times 360$$

$$angle\ (°) = \frac{\frac{5}{6}\pi \times 360}{2\pi} = \frac{5\pi \times 360}{12\pi} = 150°$$

VII. Outils algébriques et trigonométrie

On rappelle la représentation d'un point sur le cercle trigonométrique :



Il est possible dans ce contexte de faire intervenir la relation de Pythagore au sein du triangle vert afin de déterminer une coordonnée manquante $\cos\theta$ ou $\sin\theta$ utilisant les propriétés du cercle trigonométrique telle que :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$$

Exemple :

Soit $\sin\theta = \frac{1}{2}$, déterminer $\cos\theta$:

$$\cos^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\cos^2\theta = 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ou \qquad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Formule d'addition

$$\cos\,(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin\,(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos\,(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin\,(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Formule de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

VIII. Fiche récapitulative

Formule de trigonométrie au sein du triangle :

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{Côté\ Adjacent}{Hypoténuse}$$

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{Côté\ Opposé}{Hypoténuse}$$

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{Côté\ Opposé}{Côté\ adjacent}$$

Pythagore au sein du cercle trigonométrique : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$

Un tour de cercle correspond à : $360° \Leftrightarrow 2\pi$

Conversion d'angle degré radian : $angle\ (°) \times 2\pi = angle\ (rad) \times 360$

Propriétés du cercle trigonométrique :

- Le rayon du cercle est égal à 1
- Le cercle est orienté « + » dans le sens antihoraire
- Et « - » dans l'autre sens.

Encadrement des images par les fonctions cosinus et sinus :

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$
$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

La mesure principale d'un angle appartient à l'ensemble : $]-\pi;\pi]$ ou $-\pi < \theta \leq \pi$

Parité de la fonction cosinus : $\cos(-a) = \cos a$

Imparité de la fonction sinus : $\sin(-a) = -\sin a$